ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Ιανουάριος 2025
Τελική εξέταση - Διάρκεια: 5 ώρες
Καλή Επιτυχία!

(**1**) Δώστε παράδειγμα ή αποδείξτε εν συντομία ότι δεν υπάρχει τέτοιο παράδειγμα:

(**i**) Μετρήσιμο $E \subset \mathbb{R}$ με $m(E) > 0$ και $m(E \cap [a,b]) \leq (b-a)/2$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$.

(**ii**) Συνεχής $f\colon [0,1] \to [0,1]$, σχεδόν παντού παραγωγίσιμη με φραγμένη παράγωγο, η οποία δεν είναι *Lip*-συνεχής.

(**iii**) Συνεχής, γνησίως αύξουσα $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη, όμως η παράγωγος της μηδενίζεται σε σύνολο θετικού μέτρου.

(**iv**) Μέτρο *Borel* μ στο $\mathbb{R}$ με $\mu \ll m_{\mathbb{R}}$ και $\mu([n, n+1/n]) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(**2**) (**i**) Εαν $f \in L^1(\mathbb{R})$ δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x \in [0,1]$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(x+n)$ συγκλίνει.

(**ii**) Για ποια $a > 0$ υπάρχει ακολουθία μετρήσιμων $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\int |f_n| \, dm_{\mathbb{R}} = \frac{1}{n^a}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όμως $f_n \not\to 0$ σ.π.;

(**3**) (*i*) Έστω μ *Borel* μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσες φραγμένες συναρτήσεις. Δείξτε ότι $\int f \cdot g \, d\mu \geq \int f \, d\mu \cdot \int g \, d\mu$.
(Υπόδειξη: $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$.)

(*ii*) Χρησιμοποιώντας το (*i*) δείξτε το εξής: Εάν (a_n), (b_n) αύξουσες ακολουθίες, τότε

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n \, b_n \geq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} b_n$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$.

(**4**) (*i*) Έστω μ, ν φραγμένα μέτρα *Borel* στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει σύνολο *Borel* A τέτοιο ώστε $\mu(E) \geq 2025\,\nu(E)$ για κάθε *Borel* $E \subset A$ και $\mu(E) \leq 2025\,\nu(E)$ για κάθε *Borel* $E \subset \mathbb{R} \setminus A$.

(*ii*) Έστω μ φραγμένο μέτρο *Borel* στο $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\mu \ll m_{\mathbb{R}}$ και $m_{\mathbb{R}} \ll \mu$. Δείξτε ότι το όριο $\lim_{h \to 0^+} \frac{\mu((x-h, x+h))}{h}$ υπάρχει σχεδόν παντού και είναι θετικό.

(**5**) (*i*) Έστω μ, ν φραγμένα μέτρα *Borel* στο $[0,1]$. Εαν $\int_0^1 x^n \, d\mu = \int_0^1 x^n \, d\nu$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$, δείξτε ότι $\mu = \nu$.

(*ii*) Βρείτε όλα τα φραγμένα μέτρα *Borel* μ στο $[0,1]$ που ικανοποιούν

$$\int_0^1 \frac{1}{1+tx} \, d\mu(t) = 1$$

για κάθε $x \in (0,1)$.
