

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2024

Παράδοση: Δευτέρα 7 Οκτωβρίου.

Παραδώστε λυμένες τις ασκήσεις 1, 2, 4, 8, 9.

(1) (i) Δείξτε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^d είναι G_δ (δηλαδή αριθμήσιμη τομή ανοιχτών) και κάθε ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^d είναι F_σ (δηλαδή αριθμήσιμη ένωση κλειστών).

(ii) Δείξτε ότι το σύνολο των ρητών είναι F_σ αλλά όχι G_δ (μπορείτε να κάνετε χρήση του θεωρήματος *Baire*).

(2) Έστω $E \subset \mathbb{R}^d$.

(i) Δείξτε ότι $m_*(E) = \inf\{m_*(O) : O \text{ ανοιχτό } E \subset O\}$.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει G_δ υποσύνολο του \mathbb{R}^d το οποίο περιέχει το E και έχει το ίδιο εξωτερικό μέτρο με το E .

(3) Δείξτε ότι κάθε αριθμήσιμη ένωση ευθειών στο επίπεδο έχει εξωτερικό μέτρο 0.

(4) Έστω $E \subset \mathbb{R}$ με εξωτερικό μέτρο 0. Δείξτε ότι το σύνολο $E^2 = \{x^2 : x \in E\}$ έχει επίσης εξωτερικό μέτρο 0.

(5) Έστω $E \subset \mathbb{R}$ με εξωτερικό μέτρο 0.

(i) Δείξτε ότι το συμπλήρωμα του E είναι πυκνό στους πραγματικούς.

(ii) Δείξτε ότι για κάθε $A \subset \mathbb{R}$ έχουμε $m_*(E \cup A) = m_*(A) = m_*(A \setminus E)$.

(6) Έαν $E_k \subset \mathbb{R}^d$, $k = 1, 2, \dots$, ορίζουμε

$$\limsup_k(E_k) = \{x \in \mathbb{R}^d : x \in E_k \text{ για άπειρα } k \in \mathbb{N}\}.$$

(i) Δείξτε ότι $\limsup_k(E_k) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} E_k$.

(ii) Εάν $\sum_{k=1}^{\infty} m_*(E_k) < \infty$, δείξτε ότι $m_*(\limsup_k(E_k)) = 0$.

(iii) Δώστε παράδειγμα συνόλων $E_k \subset \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$, τέτοια ώστε $\sum_{k=1}^{\infty} m_*(E_k) = \infty$ αλλά $\limsup_k(E_k) = \emptyset$.

(7) Έαν $E \subset \mathbb{R}$, ορίζουμε

$$J_*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^N |I_j| : E \subset \bigcup_{j=1}^N I_j, I_j \text{ κλειστά διαστήματα}, N \in \mathbb{N} \right\}.$$

(i) Δείξτε ότι $J_*(E) = J_*(\overline{E})$, επομένως $J_*(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 1$.

(ii) Δείξτε ότι $m_*(E) \leq J_*(E)$ και δώστε παράδειγμα όπου $m_*(E) < J_*(E)$.

(8) Για κάθε $\delta \in (0, 1)$ κατασκευάζουμε ένα σύνολο C_δ , τύπου *Cantor*, αφαιρώντας από κάθε διάστημα που παραμένει στο k βήμα διάστημα μήκους $\delta 3^{-k}$. Ναδειχθεί ότι το C_δ είναι τέλειο σύνολο (δηλαδή κλειστό και δεν έχει μεμονωμένα σημεία), δεν περιέχει κανένα διάστημα, και $m_*(C_\delta) = 1 - \delta > 0$

(9) Έστω C το σύνολο *Cantor*.

(i) Είναι το $C \cap \mathbb{Q}$ πυκνό στο C ;

(ii) \spadesuit Δείξτε ότι $C + C = [0, 2]$, δηλαδή κάθε αριθμός στο $[0, 2]$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο αριθμών στο C .
