ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2024
Παράδοση: Δευτέρα 21 Οκτωβρίου.
Παραδώστε τις ασκήσεις 2, 5, 6, 8 και όσοι μπορούν την 9 αλλιώς την 4.

(**1**) (**i**) Έαν A είναι οι ρητοί στο $[0, 1]$ και B οι άρρητοι στο $[1, 2]$, δείξτε ότι το σύνολο $A \cup B$ είναι $Borel$ αλλά δεν είναι G_δ ούτε F_σ.

(**ii**) Ισχύει ότι κάθε $Borel$ υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ διαφέρει από κάποιο F_σ σε σύνολο μέτρου 0;

(**2**) (**i**) Έστω $E \subset \mathbb{R}^d$ τέτοιο ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο E' με $E \subset E'$ και $m_*(E' \setminus E) \leq \varepsilon$. Είναι το E υποχρεωτικά μετρήσιμο;

(**ii**) Έστω $E \subset \mathbb{R}^d$ τέτοιο ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο E' με $m_*(E' \triangle E) \leq \varepsilon$. Είναι το E υποχρεωτικά μετρήσιμο;

(**3**) Να δειχθεί ότι ένα υποσύνολο E του $\mathbb{R}^d$ είναι μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε ανοιχτό υποσύνολο O του $\mathbb{R}^d$ έχουμε

$$m(O) = m_*(O \cap E) + m_*(O \cap E^c).$$

(Εξετάστε πρώτα την περίπτωση όπου $m_*(E) < \infty$.)

(**4**) Έστω E το σύνολο των πραγματικών αριθμών στο $[0, 1]$ οι οποίοι περιέχουν άπειρες φορές τα ψηφία 2024 (με αυτή τη σειρά) στο δεκαδικό τους ανάπτυγμα. Δείξτε οτι το E είναι μετρήσιμο και υπολογίστε το μέτρο του.

(**5**) Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $m(E) = 1$. Υπάρχει πάντα μετρήσιμο $E' \subset E$ με $m(E') = 1/3$; Υπάρχει πάντα συμπαγές $K \subset E$ με $m(K) = 1/3$;

(**6**) (**i**) Έστω $E \subset \mathbb{R}$ με $m_*(E) > 0$. Δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ υπάρχει (μη τετριμμένο) διάστημα I τέτοιο ώστε $m_*(E \cap I) \geq \lambda \cdot m_*(I)$.

(**ii**) Έστω A, B μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με θετικό μέτρο. Να δειχθεί οτι το σύνολο $A + B = \{a + b \colon a \in A, b \in B\}$ περιέχει κάποιο (μη τετριμμένο) διάστημα.

Υπόδειξη: Κάντε χρήση του (i) για λ κοντά στο 1.

(**7**) (**i**) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ κατασκευάστε ανοιχτό $O_n \subset \mathbb{R}$ το οποίο περιέχει τους ρητούς και $m(O_n) \leq 1/n$.

(**ii**) Εάν $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$, δείξτε ότι $m(A) = 0$ και ότι το συμπλήρωμα του A είναι πρώτης κατηγορίας (δηλαδή μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων που δεν περιέχουν κανένα μη τετριμμένο διάστημα.). Συμπεράνετε ότι το $\mathbb{R}$ είναι ένωση δύο ‘μικρών’ συνόλων.

---

(8) **(i)** Να δειχθεί ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ στέλνει F_σ σύνολα σε F_σ σύνολα.

(ii) Να δειχθεί ότι κάθε *Lipschitz* συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ στέλνει σύνολα μέτρου 0 σε σύνολα μέτρου 0.

(iii) Να δειχθεί ότι κάθε *Lipschitz* συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ στέλνει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα.

---

(9)$^\spadesuit$ **(i)** Δείξτε ότι το ανοιχτό μοναδιαίο τετράγωνο δεν μπορεί να γραφεί ως ένωση μη επικαλυπτόμενων κλειστών δίσκων.

(ii) Δείξτε ότι κάθε παραλληλόγραμμο μπορεί να γραφεί ως ένωση μη επικαλυπτόμενων κλειστών δίσκων και ενός συνόλου μέτρου 0.

---

(10) Έστω $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ στροφή.

(i) Χρησιμοποιήστε το δεύτερο μέρος της προηγούμενης άσκησης για να δείξετε ότι $m(I) = m(R(I))$ για κάθε παραλληλόγραμμο I.

(ii) Δείξτε ότι $m_*(E) = m_*(R(E))$ για κάθε $E \subset \mathbb{R}^2$.