ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2024
Παράδοση: Τετάρτη 30 Οκτωβρίου
Παραδώστε τις ασκήσεις 3, 4, 5, 6 και όσοι μπορούν την 9 αλλιώς την 1.

(**1**) Είναι γνωστό (θεώρημα *Dirichlet*) ότι για κάθε άρρητο x υπάρχουν άπειροι ρητοί p/q (p, q είναι σχετικά πρώτοι) τέτοιοι ώστε $|x - p/q| \leq 1/q^2$. Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x \in [0,1]$ υπάρχουν πεπερασμένοι το πλήθος ρητοί p/q (p, q είναι σχετικά πρώτοι) τέτοιοι ώστε $|x - p/q| \leq 1/(q^2(\log(q+1))^2)$.

Υπόδειξη: Κάντε χρήση της Ασκησης 6 (ii) από το Φυλλάδιο 1.

(**2**) Έαν V είναι το σύνολο *Vitali*, δείξτε ότι $m_*([0,1] \setminus V) = 1$. Συμπεράνετε ότι εάν $E_1 = V$ και $E_2 = [0,1] \setminus V$, τότε $m_*(E_1 \cup E_2) < m_*(E_1) + m_*(E_2)$.

(**3**) (**i**) Έαν $E_1, E_2, \ldots$ είναι υποσύνολα του $[0,1]$ τέτοια ώστε $E_n \subset E_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $m_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m_*(E_n)$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε ότι για κάθε σύνολο υπάρχει μετρήσιμο που το περιέχει και έχει το ίδιο εξωτερικό μέτρο.

(**ii**) Κατασκευάστε (μη μετρήσιμα) υποσύνολα $E_1, E_2, \ldots$ του $[0,1]$ τέτοια ώστε $E_{n+1} \subset E_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $m_*(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) \neq \lim_{n\to\infty} m_*(E_n)$.

(**4**) Κατασκευάστε διαμέριση $E_1, E_2, \ldots$ του $[0,1]$ και $s_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, ώστε $\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k + s_k)$.

(**5**) (**i**) Έστω $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το σύνολο $f^{-1}((-\infty, r))$ είναι μετρήσιμο για κάθε $r \in \mathbb{Q}$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η f είναι μετρήσιμη;

(**ii**) Έστω $f_t\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$, συνεχείς συναρτήσεις. Είναι η συνάρτηση $\sup_{t\in[0,1]} f_t$ πάντα συνεχής; Μετρήσιμη;

(**iii**) Έστω $f_t\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$, μετρήσιμες συναρτήσεις. Είναι η συνάρτηση $\sup_{t\in[0,1]} f_t$ πάντα μετρήσιμη;

(**6**) (**i**) Έστω $f_n\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι το σύνολο

$$E = \{x \in \mathbb{R}^d \colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ \text{ υπάρχει ή είναι } \pm\infty\}$$

είναι μετρήσιμο.

(**ii**) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι το σύνολο

$$E = \{x \in \mathbb{R} \colon f'(x) \ \text{ υπάρχει ή είναι } \pm\infty\}$$

είναι μετρήσιμο και η συνάρτηση $f'\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη.

(**7**) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε κάθε συνάρτηση $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ που ταυτίζετε με την f σχεδόν παντού είναι παντού ασυνεχής.

Υπόδειξη: Κάντε χρήση της Ασκησης 9.

(**8**) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Είναι γνωστό ότι έαν η f είναι συνεχής τότε είναι γραμμική. Στόχος αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε το ίδιο με την ποιό ασθενή υπόθεση ότι η f είναι μετρήσιμη.

(**i**) Δείξτε ότι αν η f είναι φραγμένη σε κάποιο διάστημα που περιέχει το 0, τότε η f είναι συνεχής στο 0, και συνεπώς γραμμική.

(**ii**) Δείξτε ότι έαν η f είναι μετρήσιμη τότε είναι φραγμένη σε κάποιο διάστημα που περιέχει το 0 (Κάντε χρήση της Ασκησης 6 (*ii*) από το Φυλλάδιο 2.). Συμπεράνετε ότι η f είναι γραμμική.

(**9**) (*i*) Κατασκευάστε μετρήσιμο υποσύνολο E του $[0,1]$ τέτοιο ώστε $m(E) < 1$ και $m(I \cap E) > 0$ για κάθε μη τετριμμένο διάστημα $I \subset [0,1]$.

(*ii*)$^\spadesuit$ Κατασκευάστε μετρήσιμο υποσύνολο E του $[0,1]$ τέτοιο ώστε $m(I \cap E) \cdot m(I \cap E^c) > 0$ για κάθε μη τετριμμένο διάστημα $I \subset [0,1]$.
