

4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2024

Παράδοση: Τετάρτη 13 Νοεμβρίου

Παραδώστε τις ασκήσεις 4, 5, 7, 9 και όσοι μπορούν την 10 αλλιώς την 8.

(1) (i) Έστω $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ θετικών ακεραίων τέτοια ώστε $f_n(x)/c_n \rightarrow 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Έστω $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ θετικών ακεραίων τέτοια ώστε $f_n(x)/c_n \rightarrow 0$ σχεδόν παντού.

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι υπάρχουν c_n με $m(\{x: |f_n(x)|/c_n > 1/n\}) \leq 1/2^n$.

(iii) Μπορούμε στο (ii) να αντικαταστήσουμε το σχεδόν παντού με παντού;

(2) (i) Έστω $E \subset \mathbb{R}^d$ με $m(E) < +\infty$, και $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, μετρήσιμες συναρτήσεις με $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| < +\infty$ για κάθε $x \in E$. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F_\varepsilon \subset E$ με $m(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ και $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in F_\varepsilon} |f_n(x)| < +\infty$. (Με άλλα λόγια, κάθε κατά σημείο φραγμένη ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων είναι 'σχεδόν' ομοιόμορφα φραγμένη.)

(ii) Έστω $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F_\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$ με $m(\mathbb{R}^d \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ και $\lim_{|x| \rightarrow \infty, x \in F_\varepsilon} f(x) = 0$. (Με άλλα λόγια, κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση 'σχεδόν' συγκλίνει στο μηδέν καθώς $|x| \rightarrow +\infty$.)

(3)(i) Δώστε παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ αλλά $\int_1^\infty |f|^p dx = +\infty$ για κάθε $p > 0$.

(ii) Δώστε παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\int_1^\infty f^p dx < +\infty$ για κάθε $p > 0$ αλλά $\limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(4) (i) Έστω E_1, \dots, E_N μετρήσιμα υποσύνολα του $[0, 1]$. Εάν $\sum_{n=1}^N m(E_n) > N - 1$, δείξτε ότι $m(\bigcap_{n=1}^N E_n) > 0$.

(ii) Έστω E_1, \dots, E_N μετρήσιμα υποσύνολα του $[0, 1]$ με το ίδιο μέτρο α . Δείξτε ότι υπάρχουν διαφορετικά i, j τέτοια ώστε $m(E_i \cap E_j) \geq \alpha^2 - \alpha/N$.

(iii) Έστω E_1, E_2, \dots μετρήσιμα υποσύνολα του $[0, 1]$ με το ίδιο μέτρο α . Δείξτε ότι για κάθε $c \in (0, 1)$ υπάρχουν διαφορετικά i, j τέτοια ώστε $m(E_i \cap E_j) \geq c\alpha^2$.

(5) Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(i) Εάν $\int_E f dx = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subset [0, 1]$, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού.

(ii) Εάν $\int_E f dx = 0$ για κάθε $E \subset [0, 1]$ με $m(E) = 1/3$, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού.

Υπόδειξη: Κάντε χρήση της άσκησης 5 από το φυλλάδιο 2.

(6) Έστω $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k m(\{x: |f(x)| > 2^k\}) < +\infty.$$

(7) Έστω $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση που ικανοποιεί: για κάθε $t \in [0, 1]$ η $f(t, x)$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς x , η μερική παράγωγος $\partial f(t, x)/\partial t$ ορίζεται για κάθε $t, x \in [0, 1]$, και $\sup_{t \in [0, 1]} |\partial f(t, x)/\partial t| \leq g(x)$ όπου $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Δείξτε ότι η συνάρτηση $x \rightarrow \partial f(t, x)/\partial t$ είναι μετρήσιμη και ολοκληρώσιμη για κάθε $t \in [0, 1]$, η συνάρτηση $t \rightarrow \int_0^1 f(t, x) dx$ είναι παραγωγίσιμη, και

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 f(t, x) dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) dx.$$

(8) Για $n \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{R}$ με δεκαδικό ανάπτυγμα $x = a_0.a_1a_2a_3 \dots$ ορίζουμε

$$A_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } a_n \text{ είναι περιττός} \\ -1 & \text{εάν } a_n \text{ είναι άρτιος.} \end{cases}$$

(Η συνάρτηση $x \rightarrow A_n(x)$ είναι καλά ορισμένη σχεδόν παντού, και μετρήσιμη.)

Δείξτε ότι για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) \cdot A_n(x) dx = 0.$$

Υπόδειξη: Δείξτε το πρώτα όταν $f = \mathbf{1}_{[a, b]}$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

(9) (i) Έστω $E \subset \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο και $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, μετρήσιμες συναρτήσεις. Εάν $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| dx < +\infty$, δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει απόλυτα σχεδόν για κάθε $x \in E$.

(ii) Έστω r_1, r_2, \dots μία οποιαδήποτε αρίθμηση των ρητών στο $[0, 1]$, και $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία με $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n |x - r_n|^{-1/2}$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in [0, 1]$.

(iii) Εάν $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} |x - r_n|^{-1/2}$ (r_n όπως πριν), δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$, αλλά η f^2 δεν είναι ολοκληρώσιμη σε κανένα διάστημα $(a, b) \subset [0, 1]$.

(10) \spadesuit Έστω $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες με $\int_0^1 f dx = \int_0^1 g dx = 1$. Δείξτε ότι για κάθε $a \in (0, 1)$ υπάρχει μετρήσιμο $E \subset [0, 1]$ ώστε $\int_E f dx = \int_E g dx = a$.
