ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2024
Παράδοση: Τετάρτη 27 Νοεμβρίου.
Παραδώστε τις ασκήσεις 3, 5, 8, 9 και όσοι μπορούν την 10 αλλιώς την 6.

(**1**) Λέμε ότι μία ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n\colon E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει κατά μέτρο σε μία συνάρτηση f (και γράφουμε $f_n \to^m f$) εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} m(\{x \in E\colon |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

(**i**) Έστω $m(E) < +\infty$. Δείξτε ότι εάν $f_n \to f$ σχεδόν παντού ή $f_n \to^{L^1} f$, τότε $f_n \to^m f$.

(**ii**) Δείξτε ότι εάν $f_n \to^m f$ τότε δεν έπεται υποχρεωτικά ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού, υπάρχει όμως υποακολουθία f_{n_k} τέτοια ώστε $f_{n_k \to f}$ σχεδόν παντού. Συμπεράνετε ότι κατά μέτρο όριο μετρήσιμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

(**2**) (**i**) Έστω $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση, $T\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ αντιστρέψιμη απεικόνιση, και $T^{-1}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *Lipschitz* απεικόνιση με *Lipschitz* σταθερά L ως προς την ευκλείδια μετρική στον $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f \circ T$ είναι ολοκληρώσιμη και ότι

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(T(x))|\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx.$$

για κάποια σταθερά $C > 0$ η οποία εξαρτάται μόνο από το d και το L.

Υπόδειξη: Έχουμε δει ότι το ζητούμενο ισχύει για $f = \mathbf{1}_E$ και $d = 1$ με $C = L$.Για γενικό $d \in \mathbb{N}$ παρόμοιο επιχείρημα δουλεύει π.χ. με $C = (\sqrt{d}\, L)^d$. Υποθέστε λοιπόν ότι το ζητούμενο ισχύει για $f = \mathbf{1}_E$.

(**ii**) Έστω $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $T\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f \circ T$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(T(x))\, dx = |\det(T)|^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx.$$

(Πάρτε ως δεδομένο ότι ο τύπος ισχύει για $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$.)

(**3**) (**i**) Έστω $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ομοιόμορφα φραγμένες μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\int_0^1 f_n(x) \cdot f_m(x)\, dx = 0$ για κάθε $n \neq m$. Δείξτε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_n(x) = 0 \quad \text{σχεδόν για κάθε } x \in [0,1].$$

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι $\lim_{N\to\infty} \int_0^1 \left| \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N^2} f_n(x) \right|^2 dx = 0$.

(**ii**) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία διαφορετικών ακεραίων. Δείξτε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi a_n x) = 0 \quad \text{σχεδόν για κάθε } x \in [0,1].$$

(**4**) (**i**) Έστω $p,q \in [1,+\infty]$ με $1/p + 1/q = 1$. Εάν $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$ και $\|g_n - g\|_{L^q} \to 0$, δείξτε ότι $\|f_n g_n - fg\|_{L^1} \to 0$.

(**ii**) Έστω $r,s,t \in [1,+\infty]$ με $r \leq s \leq t$. Δείξτε ότι $\|f\|_{L^s} \leq \|f\|_{L^r}^{\theta} \cdot \|f\|_{L^t}^{1-\theta}$ όπου το θ ικανοποιεί $\frac{1}{s} = \frac{\theta}{r} + \frac{1-\theta}{t}$. Συμπεράνετε ότι $L^r \cap L^t \subset L^s$.

(**5**) (**i**) Εάν $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη, δείξτε ότι $\|f\|_{L^p[0,1]} \leq \|f\|_{L^q[0,1]}$ για κάθε $p,q \in [1,+\infty]$ με $p \leq q$.

(**ii**) Εάν $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη, δείξτε ότι $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p[0,1]} = \|f\|_{L^\infty[0,1]}$.

(**6**) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^+$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) Υπάρχει θετική σταθερά c_1 τέτοια ώστε $\|f\|_{L^p[0,1]} \leq c_1 p$ για κάθε $p \in \mathbb{N}$.

(ii) Υπάρχει θετική σταθερά c_2 τέτοια ώστε $\left\|e^{c_2 f}\right\|_{L^1[0,1]} < +\infty$.

(**7**) Έστω $A \subset \mathbb{R}^{d_1}$ και $B \subset \mathbb{R}^{d_2}$ με θετικό εξωτερικό μέτρο. Δείξτε ότι το σύνολο $A \times B$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$ αν και μόνο αν τα A και B είναι μετρήσιμα. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $m_{\mathbb{R}^{d_1+d_2}}(A \times B) = m_{\mathbb{R}^{d_1}}(A) \cdot m_{\mathbb{R}^{d_2}}(B)$.

(**8**) (**i**) Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Εάν σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $m(\{y\colon (x,y) \in E\}) = 0$, δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $y \in \mathbb{R}$ έχουμε $m(\{x\colon (x,y) \in E\}) = 0$.

(**ii**) Έστω E *Borel* υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το σύνολο $E_x = \{y\colon (x,y) \in E\}$ είναι *Borel* υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι το σύνολο των E που έχουν αυτή την ιδιότητα είναι σ-άλγεβρα.

(**9**) (**i**) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη. Εάν η συνάρτηση $f(x) - f(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο μοναδιαίο τετράγωνο, δείξτε ότι $f \in L^1([0,1])$.

(**ii**) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη με περίοδο 1, δηλαδή, $f(t+1) = f(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Εάν

$$\int_0^1 |f(x+t) - f(x)|\, dx \leq 1$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $f \in L^1([0,1])$.

(**10**)$^\spadesuit$ Λέμε ένα κλειστό παραλληλόγραμο 'καλό' εάν οι πλευρές του είναι παράλληλες στους καρτεσιανούς άξονες και τουλάχιστον μία από αυτές έχει ακέραιο μήκος. Δείξτε ότι εάν κάποιο κλειστό παραλληλόγραμο μπορεί να χωριστεί σε 'καλά', μη επικαλυπτόμενα παραλληλόγραμμα, τότε είναι και το ίδιο 'καλό'.

Υπόδειξη: Βρείτε $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\int_a^b f(x)\, dx = 0$ αν και μόνο αν $b - a \in \mathbb{Z}$.
