

8ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2024

Παράδοση: Τετάρτη 22 Ιανουαρίου.

Παραδώστε όλες τις ασκήσεις.

(1) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ και $f^* \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού.

(2) Έστω $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ τοπικά ολοκληρώσιμη ($\int_B |f(x)| dx < +\infty$ για κάθε μπάλα B).

(i) Δείξτε ότι το θεώρημα διαφορίσισης του *Lebesgue* ισχύει για την f .

(Δηλαδή δείξτε ότι $\lim_{m_{\mathbb{R}}(B) \rightarrow 0, x \in B} \frac{\int_B f(x) dx}{m_{\mathbb{R}}(B)} = f(x)$ σχεδόν παντού, B μπάλα.)

(ii) Είναι σωστό ότι $f^*(x) < +\infty$ σχεδόν παντού;

(3) Έστω μ ένα τοπικά πεπερασμένο μέτρο *Borel* στον \mathbb{R} ($\mu(B) < \infty$ για κάθε μπάλα B) τέτοιο ώστε $\mu \ll m_{\mathbb{R}}$. Δείξτε ότι για όλα τα σύνολα *Borel* E έχουμε

$$\lim_{m_{\mathbb{R}}(B) \rightarrow 0, x \in B} \frac{\mu(E \cap B)}{\mu(B)} = \mathbf{1}_E(x)$$

σχεδόν παντού ως προς το μ , δηλαδή, για όλα τα x έξω από ένα σύνολο με μ -μέτρο 0.

Υπόδειξη: Αρχικά κάντε χρήση του θεωρήματος *Radon-Nikodym*. Είναι μέρος του ζητούμενου να δείξετε ότι το πηλίκο είναι καλά ορισμένο σχεδόν παντού ως προς το μ .

(4) Εάν E είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του \mathbb{R}^d δείξτε ότι για κάθε $r > 0$ η συνάρτηση $f_r(x) = m_*(E \cap B(x, r))$ είναι συνεχής.

Υπόδειξη: Η άσκηση 4 από το Φυλλάδιο 6 θα σας φανεί χρήσιμη.

(ii) Δίνεται ένα σύνολο $E \subset \mathbb{R}^d$ για το οποίο ισχύει

$$\lim_{m(B) \rightarrow 0, x \in B} \frac{m_*(E \cap B)}{m(B)} = \mathbf{1}_E(x)$$

σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι το E είναι μετρήσιμο.

(5) Έστω $E \subset \mathbb{R}$ μετρήσιμο και $m_{\mathbb{R}}(E) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (s_n) τέτοια ώστε $m_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (E + s_n)) = 0$.

Υπόδειξη: Δεδομένου $\varepsilon > 0$ χρησιμοποιήστε κάποιο σημείο πυκνότητας του E για να βρείτε $(s_{\varepsilon, n})$ τέτοια ώστε $m_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (E + s_{\varepsilon, n})) \leq \varepsilon$.

(6) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^a$, $a > 0$, είναι απόλυτα συνεχής σε κάθε συμπαγές υποδιάστημα του $(0, \infty)$. Για $a \in (0, 1)$ δείξτε ότι είναι απόλυτα συνεχής στο $(0, 1)$. Για ποιά a είναι απόλυτα συνεχής στο $(0, \infty)$;

(7) Δείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα, απόλυτα συνεχής, και σχεδόν παντού παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, τέτοια ώστε

$$m_{\mathbb{R}}(\{x: f'(x) = 0\} \cap I) > 0$$

για κάθε (μη τετριμμένο) διάστημα $I \subset [0, 1]$.

Υπόδειξη: $f(x) = m_{\mathbb{R}}(E \cap [0, x])$ όπου E το σύνολο της άσκησης 9 από το Φυλλάδιο 2.

(8) Δείξτε ότι κάθε απόλυτα συνεχής συνάρτηση στέλνει σύνολα μέτρου 0 σε σύνολα μέτρου 0 και μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα.

(9) Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο *Borel* στο $[0, 1]$. Δείξτε ότι $\mu \ll m_{\mathbb{R}}$ αν και μόνο αν η συνάρτηση $f(x) = \mu([0, x])$ είναι απόλυτα συνεχής στο $[0, 1]$.

(10)[♦] Δείξτε ότι κάθε ένωση (όχι υποχρεωτικά αριθμήσιμη) κλειστών μπαλών στον \mathbb{R}^d είναι μετρήσιμο σύνολο. Είναι πάντα σύνολο *Borel*;
