ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ(Μεταπτυχιακό)

Πρόοδος-Χειμερινό Εξάμηνο 2024
Διάρκεια: 2 ώρες
Καλή Επιτυχία!

(**1**) (2 Μονάδες) Έστω $E \subset [0,1]$ (όχι υποχρεωτικά μετρήσιμο) με $m_*(E) = 1$.

(i) Δείξτε ότι υπάρχει $E' \subset E$ τέτοιο ώστε $m_*(E') = 1/2$.

(ii) Μπορούμε πάντα στο (i) να πάρουμε το E' να είναι μετρήσιμο;

(Μπορείτε να υποθέσετε ότι υπάρχει σύνολο $V \subset [0,1]$, τύπου $Vitali$, με $m_*(V) > 1/2$.)

(**2**) (3 Μονάδες) (i) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$m(x \in [0,1]\colon |f| \leq M) \geq 1 - \varepsilon.$$

(ii) Έστω $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία αρίθμηση των ρητών στο $[0,1]$ και

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathbf{1}_{(q_n, q_n + 1/n^2)}(x), \quad x \in [0,1].$$

Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη, $f \neq +\infty$ σ.π., και σε κάθε μη τετριμμένο υποδιάστημα του $[0,1]$ η f **δεν** είναι σχεδόν παντού φραγμένη.

(**3**) (2 Μονάδες) (i) Έστω $f_n, f\colon \mathbb{R}^d \to [0,+\infty]$ μετρήσιμες τέτοιες ώστε $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ σ.π. και $\int f\,dm = +\infty$. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \int f_n\,dm = +\infty$.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχουν $f_n, f\colon \mathbb{R}^d \to [-1,1]$ μετρήσιμες τέτοιες ώστε $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ σ.π. και $\int f\,dm = +\infty$, όμως $\lim_{n\to\infty} \int f_n\,dm = -\infty$.

(**4**) (2 Μονάδες) (i) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη τέτοια ώστε $\int_n^{n+1} |f|\,dm \leq \frac{1}{n^2+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Δείξτε (προσεκτικά) ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ μετρήσιμη τέτοια ώστε $\int_n^{n+1} |f|\,dm = \frac{1}{|n|+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και $\int f\,dm = +\infty$.

(**5**) (2 Μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη τέτοια ώστε $\int_0^a f\,dm = 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f = 0$ σ.π.
