ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Πρόοδος-Εαρινό Εξάμηνο 2011

Διδάσκων: Νίκος Φραντζικινάκης

Επιτρέπεται μόνο μία σελίδα με σημειώσεις. Διάρκεια 2 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(1) (3 μονάδες) Απαντήστε με ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ και δώστε μία σύντομη επεξήγηση.

(i) Κάθε μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ μπορεί να γραφεί ως ένωση ενός συνόλου *Borel* και ενός συνόλου μέτρου 0.

(ii) Εάν A είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε υπάρχει ακολουθία μετρήσιμων συνόλων (E_n) τέτοια ώστε $A \subset E_n$ και $m^*(E_n \setminus A) \leq 1/n$.

(iii) Εάν $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη, τότε υπάρχει $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f = g$ σχεδόν παντού.

(iv) Εάν $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, μετρήσιμες συναρτήσεις και $f_n \to 0$ κατά σημείο, τότε υπάρχει μετρήσιμο $E \subset [0,1]$ τέτοιο ώστε $m(E) \geq 0.99$ και $\sup_{x\in E} |f(x)| \leq 0.01$.

(2) (1.5 μονάδες) **(i)** Έστω $E \subset \mathbb{R}$ με $m(E) = 0$. Να δειχθεί ότι το **συμπλήρωμα** του E είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

(ii) Έστω $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις και $f = g$ σχεδόν παντού. Να δειχθεί ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(3) (1.5 μονάδες) Έστω N το σύνολο *Vitali* και $E \subset N$. Δείξτε ότι το E είναι μετρήσιμο αν και μόνο αν $m^*(E) = 0$. ($[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(N + r_n) \subset [-1,2]$, όπου $\mathbb{Q} \cap [-1,1] = \{r_1, r_2, \ldots\}$)

(4) (2.5 μονάδες) **(i)** Κατασκευάστε ένα ανοιχτό σύνολο $O \subset [0,1]$ τέτοιο ώστε $m(O) < 1$ και $m(O \cap I) > 0$ **για κάθε** (μη τετριμμένο) διάστημα $I \subset [0,1]$.

(ii) Δείξτε ότι **δεν** υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $E \subset [0,1]$ τέτοιο ώστε $m(E \cap I) = \ell(I)/2$ **για κάθε** διάστημα $I \subset [0,1]$.

(5) (2 μονάδες) Έστω $f_n\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, μετρήσιμες συναρτήσεις.

(i) Δείξτε ότι το σύνολο $E = \{x \in \mathbb{R}\colon \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) < \infty\}$ είναι μετρήσιμο.

(ii) Εάν E όπως πριν, δείξτε ότι η συνάρτηση $f\colon E \to [0, \infty)$, με τύπο $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, είναι μετρήσιμη.