ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Πρόοδος-Νοέμβριος 2023

Διδάσκων: Νίκος Φραντζικινάκης

Επιτρέπεται μόνο μία σελίδα με σημειώσεις. Διάρκεια 2 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(**1**) (2.5 μονάδες) (**i**) Δώστε τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ και εξηγήστε πότε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο.

(**ii**) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό, δείξτε ότι εάν E είναι ένα *οποιοδήποτε* υποσύνολο των πραγματικών τότε υπάρχει μετρήσιμο σύνολο A τέτοιο ώστε $E \subset A$ και $m(A) = m^*(E)$.

(**2**) (3 μονάδες) (**i**) Έστω $E \subset \mathbb{R}$ φραγμένο. Εαν υπάρχει μετρήσιμο $A \subset E$ τέτοιο ώστε $m(A) = m^*(E)$, δείξτε ότι το E είναι μετρήσιμο.

(**ii**) Έστω $V \subset [0,1]$ σύνολο τύπου Vitali και $A \subset V$ μετρήσιμο. Δείξτε ότι $m(A) = 0$.

(**3**) (3 μονάδες) Έστω $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων.

(**i**) Δείξτε ότι τα σύνολα

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R} \colon f_n(x) > 0 \text{ για άπειρα } n \in \mathbb{N}\} \quad \text{και} \quad E_2 = \{x \in \mathbb{R} \colon f_n(x) > 0 \text{ τελικά}\}$$

είναι μετρήσιμα.

(**ii**) Έστω ότι

$$m(x \in \mathbb{R} \colon f_n(x) > 0) = \frac{1}{n^2} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι $m(E_1) = 0$. Ισχύει το ίδιο αν αντί για $1/n^2$ έχουμε $1/n$;

(**4**) (3 μονάδες) (**i**) Έστω ότι η Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί

$$m(x \in [0,1] \colon f(x) \neq 0) > 0.$$

Δείξτε ότι υπάρχει (μη τετριμμένο) διάστημα I τέτοιο ώστε $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$.

(**ii**) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$m(x \in [0,1] \colon f(x) \neq 0) > 0,$$

όμως για κάθε (μη τετριμμένο) διάστημα έχουμε

$$m(x \in I \colon f(x) = 0) > 0.$$
