ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (Μεταπτυχιακό)

4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2013
Παρακαλώ να μου παραδώσετε τις λύσεις σας πριν την Τρίτη 9 Απριλίου.

(**1**) (1 μονάδα) Έστω (ξ_n) ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ώστε $\xi_n \to \xi$ κατά πιθανότητα. Δείξτε ότι υπάρχει υποακολουθία (ξ_{n_k}) της (ξ_n) ώστε $\xi_{n_k} \to \xi$ σχεδόν βέβαια.

(**2**) (1 μονάδα) Έστω (A_n) ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων ώστε $\mathbb{P}(A_n) < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\mathbb{P}(A_n \ i.o.) = 1$ αν και μόνο αν $\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$.

(**3**) (1 μονάδα) Έστω (ξ_n) ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ώστε

$$\mathbb{P}(\xi_n = n) = 1 - 1/n^2, \qquad \mathbb{P}(\xi_n = -n^3 + n) = 1/n^2.$$

Δείξτε ότι $\mathbb{E}\xi_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ όμως $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k \to +\infty$ σχεδόν βέβαια.

(**4**) (3 μονάδες) (**i**) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά C ώστε

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(\log k)^2} \leq C \cdot \frac{n}{(\log n)^2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(**ii**) Έστω (A_n) ακολουθία ενδεχομένων ώστε $\mathbb{P}(A_n) \leq 1/(\log n)^2$ για κάθε $n \geq 2$. Δείξτε ότι σχεδόν βέβαια το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} \colon \omega \in A_n\}$ έχει πυκνότητα 0, δηλαδή, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}(\omega) \to 0$.

(**5**) (2 μονάδες) Έστω (ξ_n) ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbb{E}|\xi_1| < +\infty$. Δείξτε ότι $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k \to^{L^1} \mathbb{E}\xi_1$.

(**6**) (3 μονάδες) (**i**) Δείξτε ότι $e^x + e^{-x} \leq 2e^{x^2/2}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(**ii**) Έστω ξ τυχαία μεταβλητή ώστε $\mathbb{E}\xi = 0$ και $|\xi| \leq 1$. Δείξτε ότι $\mathbb{E}e^{t\xi} \leq e^{t^2/2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. (Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι $e^{t\xi} \leq \frac{\xi+1}{2}e^t + \frac{1-\xi}{2}e^{-t}$.)

(**iii**) Έστω $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ώστε $\mathbb{E}\xi_n = 0$ και $|\xi_n| \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Δείξτε ότι

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}S_n| \geq \lambda\sqrt{n}) \leq 2e^{-\lambda^2/2}.$$
