ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (Μεταπτυχιακό)

Τελικό Διαγώνισμα-Εαρινό Εξάμηνο 2013
Διάρκεια 4 ώρες.

(**1**) (2 μονάδες) Έστω $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{P}(\xi_n = 0) = 1/n$ και $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = 1 - 1/n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(i) Δείξτε ότι το όριο $\lim_{n\to\infty} \xi_n$ *δεν* υπάρχει σχεδόν βέβαια.

(ii) Δείξτε ότι το όριο $\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n}$ υπάρχει σχεδόν βέβαια και υπολογίστε το.

(**2**) (2 μονάδες) Έστω $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $\xi_n \sim^d U[-1/n, 1/n]$ (η ξ_n έχει συνάρτηση πυκνότητας $\frac{n}{2}\mathbf{1}_{[-1/n,1/n]}$).

(i) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ συγκλίνει σχεδόν βέβαια.

(ii) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|$ αποκλίνει σχεδόν βέβαια.

(**3**) (2 μονάδες) Έστω ξ, η τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $[0,1]$. Δείξτε ότι οι ξ, η έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής αν και μόνο αν $\mathbb{E}\xi^k = \mathbb{E}\eta^k$ για $k = 0, 1, 2, \ldots$.

(**4**) (2 μονάδες) (i) Δώστε παράδειγμα τυχαίων μεταβλητών (ξ_n) ώστε $\xi_n \to^P 0$ όμως $\xi_n \not\to^{L^2} 0$ και τυχαίων μεταβλητών $(\eta_n), \eta$, ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας, ώστε $\eta_n \to^d \eta$ όμως $\eta_n \not\to^P \eta$.

(ii) Έστω (ξ_n) ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας, ώστε $\xi_n \to^d 0$. Δείξτε ότι $\xi_n \to^P 0$.

(**5**) (2 μονάδες) Έστω $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με θετικές τιμές και $\mathbb{E}\xi_1 < \infty$.

(i) Θέτουμε

$$X_n = \frac{\sqrt{\xi_1 \cdots \xi_n}}{b^n}$$

όπου $b = \mathbb{E}(\sqrt{\xi_1})$ και $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Δείξτε ότι η ακολουθία $(X_n, \mathcal{F}_n)$ είναι *martingale*.

(ii) Εαν επιπλέον $\mathbb{E}\xi_1 = 1$ και $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) < 1$ δείξτε ότι $\xi_1 \cdots \xi_n \to 0$ σχεδόν βέβαια.

(**6**) (2 μονάδες) Έστω $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}\xi_1 = 1$ και $\mathbb{E}\xi_1^2 < \infty$. Θέτουμε $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Δείξτε ότι η ακολουθία $\sqrt{S_n} - \sqrt{n}$ συγκλίνει κατά κατανομή και υπολογίστε το όριο της.
