

Παρακαλώ να μου παραδώσετε τις λύσεις σας την Τρίτη 23 Φεβρουαρίου.

(1) (1 μονάδα) Δείξτε ότι εάν μία σ -άλγεβρα έχει άπειρα στοιχεία τότε έχει υπεραριθμήσιμα στοιχεία.

(2) (1 μονάδα) Δώστε παράδειγμα συνόλου Ω και οικογένειας υποσυνόλων \mathcal{E} ώστε $\mu(\mathcal{E}) \neq \sigma(\mathcal{E})$, όπου $\mu(\mathcal{E})$ η μικρότερη μονότονη κλάση που περιέχει το σύνολο \mathcal{E} και $\sigma(\mathcal{E})$ η μικρότερη σ -άλγεβρα που περιέχει το σύνολο \mathcal{E} . (Υπόδειξη: Είναι πολύ απλό.)

(3) (1 μονάδα) Έστω $\Omega = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ και \mathcal{A} η άλγεβρα που παράγεται από σύνολα της μορφής $(a, b) \cap \mathbb{Q}$, $[a, b) \cap \mathbb{Q}$, $(a, b] \cap \mathbb{Q}$, $[a, b] \cap \mathbb{Q}$, όπου $0 \leq a < b \leq 1$. Για A διάστημα της προηγούμενης μορφής ορίζουμε $\mathbb{P}(A) = b - a$ και επεκτείνουμε το \mathbb{P} σε πεπερασμένα προσθετικό μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$. Δείξτε ότι το \mathbb{P} δεν είναι αριθμήσιμα προσθετικό στην άλγεβρα \mathcal{A} .

(4) (1 μονάδα) Δείξτε ότι υπάρχουν μέτρα πιθανότητας $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ σε χώρο (Ω, \mathcal{F}) τέτοια ώστε το σύνολο $\{A \in \mathcal{F}: \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)\}$ να μην είναι άλγεβρα.

(5) (2 μονάδες) Έστω \mathbb{P} ένα πεπερασμένα προσθετικό μέτρο πιθανότητας στην άλγεβρα \mathcal{A} . Εάν $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ ξένα και $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ δείξτε ότι $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$. Βρείτε παράδειγμα όπου η ανισότητα είναι γνήσια.

(6) (2 μονάδες) Έστω \mathbb{P} μέτρο πιθανότητας σε χώρο $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$ όπου \mathcal{A} άλγεβρα υποσυνόλων του Ω . Δείξτε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{A})$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ ώστε $\mathbb{P}(A \Delta B) \leq \varepsilon$.

(7) (2 μονάδες) Ορίζουμε ως \mathcal{D} την οικογένεια υποσυνόλων του \mathbb{N} για τα οποία υπάρχει το όριο

$$d(E) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|E \cap [1, N]|}{N}.$$

(i) Δείξτε ότι το $d(E)$ δεν υπάρχει πάντα.

(ii) Δείξτε ότι η \mathcal{D} δεν είναι άλγεβρα.

(iii) Δείξτε ότι η συνολοσυνάρτηση $d: \mathcal{D} \rightarrow [0, 1]$ είναι πεπερασμένα προσθετικό αλλά όχι σ -προσθετικό μέτρο πιθανότητας στο σύνολο \mathcal{D} .