

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ

Τελικό Διαγώνισμα-Ιούνιος 2014-Διδάσκων: Νίκος Φραντζικινάκης

Διάρκεια 3 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(1) Ένας θετικός πραγματικός X επιλέγεται τυχαία με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = e^{-x} \cdot \mathbf{1}_{x \geq 0}.$$

(i) Βρείτε την συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y = e^X$.

(ii) Υπολογίστε την πιθανότητα το ακέραιο μέρος του X να είναι άρτιος.

(2) Επιλέγουμε τους αριθμούς X, Y ομοιόμορφα και ανεξάρτητα στο $(0.5, 1)$.

(i) Υπολογίστε την μέση τιμή $\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y} + \frac{Y}{X}\right)$.

(ii) Υπολογίστε την πιθανότητα η εξίσωση

$$t^2 + 2Xt + Y^2 = 0$$

να έχει δύο πραγματικές λύσεις.

(3) Έστω X, Y τ.μ. με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x, y) = 4xy \cdot \mathbf{1}_{0 \leq x, y \leq 1}.$$

(i) Βρείτε τις περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας. Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

(ii) Υπολογίστε την δεσμευμένη πυκνότητα $f_{Y|X}(y|x)$ και την δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}(Y|X = x)$.

(4) (i) Έστω X τυχαία μεταβλητή με ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = e^{t^2}.$$

Υπολογίστε τις ροπές $\mathbb{E}(X^k)$ για $k = 1, 2, 3, \dots$

(ii) Έστω X_1, X_2, \dots ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με κοινή κατανομή όπως στο (i). Δείξτε ότι

$$\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n)^2 = 2n$$

και κάνοντας χρήση αυτού δείξτε ότι

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n^{0.51}} \xrightarrow{\text{x.π.}} 0.$$

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι $\mathbb{E}(X) = 0, \mathbb{E}(X^2) = 2$.

(5) (i) Ένας εξεταστής έχει να διορθώσει 100 γραπτά. Οι χρόνοι που χρειάζεται για να τα διορθώσει είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κοινή κατανομή που έχει μέση τιμή 5 λεπτά και διασπορά 1 λεπτό. Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η πιθανότητα να έχει τελειώσει το διόρθωμα σε λιγότερο από 10 ώρες.

(ii) Επιλέγουμε ομοιόμορφα και ανεξάρτητα τους αριθμούς X_1, X_2, \dots στο διάστημα $[-1, 1]$. Για μεγάλα $n \in \mathbb{N}$ να υπολογιστεί προσεγγιστικά η πιθανότητα

$$\mathbb{P}(|X_1 + \dots + X_n| \leq \sqrt{n}).$$
