

Τελικό διαγώνισμα, Σεπτέμβριος 2018

Διάρκεια 3 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.

Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.

Παρακαλώ παραδώστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(1) (2.5 μονάδες) Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (i) Ποιές είναι οι κλάσεις επικοινωνίας; Ποιές είναι ανοιχτές/κλειστές, επαναληπτικές/παροδικές;
- (ii) Υπολογίστε τα όρια $\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(4, 4)$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(2, 3)$.
- (iii) Υπολογίστε τον αναμενόμενο χρόνο επιστροφής στο 3 (δεδομένου ότι ξεκινάμε στο 3).
- (iv) Υπολογίστε τη συχνότητα επισκέψεων στο 3 δεδομένου ότι ξεκινάμε στο 1.
-

(2) (1.5 μονάδες) Ένα ζάρι είναι κατασκευασμένο ώστε να φέρνει την προηγούμενη ένδειξη με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ και οποιαδήποτε άλλη ένδειξη με πιθανότητα $\frac{1}{10}$. Η πρώτη ένδειξη είναι 6. Υπολογίστε το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 6)$.

(3) (2.5 μονάδες) Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $D = \mathbb{Z}$ και πιθανότητες μετάβασης $p(x, x+1) = \frac{1}{3}$ και $p(x, x-1) = \frac{2}{3}$ για $x \in \mathbb{Z}$. Δεδομένου ότι ξεκινάμε στο 2018 (δηλαδή $\mathbb{P}(X_0 = 2018) = 1$), υπολογίστε:

- (i) Την πιθανότητα να φτάσουμε κάποτε στο 0.
- (ii) Τον αναμενόμενο χρόνο άφιξης στο 0.
-

(4) (1.5 μονάδες) Ένας παίκτης μπάσκετ ρίχνει βολές. Ευστοχεί με πιθανότητα $\frac{3}{4}$ εάν έχει ευστοχήσει στην αμέσως προηγούμενη βολή και με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ εάν έχει αστοχήσει στην αμέσως προηγούμενη βολή. Ποιο είναι το αναμενόμενο ποσοστό ευστοχίας του παίκτη στις βολές;

(5) (1.5 μονάδες) Σε μία ποδοσφαιρική αναμέτρηση μεταξύ των ομάδων A και B η ομάδα A σκοράρει σύμφωνα με διαδικασία *Poisson* και ρυθμό 1 γκολ ανά 30 λεπτά, ενώ η ομάδα B σκοράρει σύμφωνα με μία ανεξάρτητη διαδικασία *Poisson* και ρυθμό 1 γκολ ανά 45 λεπτά. Υπολογίστε την πιθανότητα η ομάδα A να προηγείται στο ημίχρονο 1-0 και το τελικό σκορ να έρθει 2-2.

- (6) (1.5 μονάδες) (i) Δώστε παράδειγμα Μαρκοβιανής αλυσίδας χωρίς καμία επαναληπτική κατάσταση.
- (ii) Δώστε παράδειγμα Μαρκοβιανής αλυσίδας της οποίας όλες οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές όχι όμως γνήσιως επαναληπτικές.
-