ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Εξεταστική Σεπτεμβρίου 2010-Διδάσκων:Νίκος Φραντζικινάκης

Διάρκεια 3 ώρες με κλειστές όλες τις σημειώσεις. Καλή τύχη!!

(1) Θεωρούμε ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, και υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η ακολουθία $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Να δειχθεί ότι υπάρχει μη κενό διάστημα (a, b), και θετική σταθερά M, έτσι ώστε $|f_n(x)| \leq M$ για κάθε $x \in (a, b)$ και $n \in \mathbb{N}$.

(2) Ορίζουμε $F\colon \ell_1 \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(\frac{x_k}{k} + x_k\big)$$

για $x = (x_1, x_2, \ldots)$.

(i) Δείξτε ότι το F είναι γραμμικό συναρτησοειδές.

(ii) Είναι το F φραγμένο; Εάν ναι, ποιά είναι η νόρμα του;

(3) **(i)** Είναι ο ℓ^∞ πλήρης; Διαχωρίσιμος; Έχει βάση *Schauder*; Είναι σωστό ότι $(\ell^\infty)^* = \ell^1$; (Απαντήστε με ναι/οχι.)

(ii) Έστω c_{00} ο γραμμικός υπόχωρος του ℓ^∞ ο οποίος αποτελείται από όλες τις ακολουθίες που είναι τελικά 0. Δώστε ένα παράδειγμα ΜΗ συνεχούς γραμμικού συναρτησοειδούς $F\colon c_{00} \to \mathbb{R}$, και ένα παράδειγμα ΜΗ συνεχούς γραμμικού τελεστή $T\colon c_{00} \to c_{00}$.

(4) **(i)** Για ποιά $p \in [1, +\infty]$ είναι ο χώρος $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ χώρος *Banach*; Χώρος *Hilbert* (δηλαδή, επιπλέον, η νόρμα του επάγεται από κάποιο εσωτερικό γινόμενο);

(ii) Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ορθοκανονική ακολουθία στον X. Αν $x, y \in X$, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} | < x, e_k > \cdot < y, e_k > | \leq \|x\| \, \|y\| \, .$$

(5) **(i)** Διατυπώστε το θεώρημα *Hahn-Banach* (καλύτερα την ισχυρή του μορφή).

(ii) Να δειχθεί ότι υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $F\colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $F((a_n))_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to+\infty} a_n$ για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(6) **(i)** Διατυπώστε το θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης.

(ii) Έστω X, Y χώροι *Banach* και $T\colon X \to Y$ φραγμένος, $1-1$ και επί, γραμμικός τελεστής. Να δειχθεί ότι και ο $T^{-1}\colon Y \to X$ είναι φραγμένος τελεστής. Συμπεράνετε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοια ώστε

$$a \|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq b \|x\|_X \, .$$