ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Τελικό Διαγώνισμα-Εαρινό εξάμηνο 2010-Διδάσκων:Νίκος Φραντζικινάκης

Διάρκεια τρείς ώρες με κλειστές όλες τις σημειώσεις. Καλή τύχη!!

(**1**) Έστω H χώρος *Hilbert*, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορθοκανονική ακολουθία του H, και $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνει.

(**2**) Έστω X γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $< \, , \, >$.

(**i**) Να δειχθεί ότι εάν $\|x_n - x\| \to 0$ και $\|y_n - y\| \to 0$ τότε $< x_n, y_n > \to < x, y >$.

(**ii**) Εάν $< x_n, x > \to 0$ για κάθε $x \in X$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\|x_n\| \to 0$;

(**3**) Έστω X χώρος με νόρμα, και $Y (\neq X)$ κλειστός υπόχωρος. Να δειχθεί οτι για κάθε $x_0 \notin Y$ υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές f τέτοιο ώστε $f(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$ και $f(x_0) = 1$.

(**4**) Να δειχθεί ότι υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές f στον ℓ^∞ τέτοιο ώστε

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le f((a_n)) \le \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

για κάθε φραγμένη ακολουθία (a_n).

(**5**) Έστω X χώρος *Banach*, Y χώρος με νόρμα, και $T_n \colon X \to Y$ ακολουθία φραγμένων γραμμικών τελεστών τέτοια ώστε το όριο $\lim_{n\to\infty} T_n x$ υπάρχει για κάθε $x \in X$. Να δειχθεί ότι ο τελεστής $T \colon X \to Y$ με τύπο $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

(**6**) Έστω $T \colon C[0,1] \to C[0,1]$ (με την *sup* νόρμα $\|\cdot\|_\infty$) γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε εάν $f_n \in C[0,1]$ και $\|f_n\|_\infty \to 0$ τότε $(Tf_n)(t) \to 0$ για κάθε $t \in [0,1]$ (προσοχή δεν υποθέτουμε ότι $\|Tf_n\|_\infty \to 0$). Να δειχθεί ότι ο τελεστής T είναι φραγμένος.

(**7**) Έστω H χώρος *Hilbert* και $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορθοκανονικές ακολουθίες.

(**i**) Εάν $< w, v_n > = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συνεπάγεται ότι $w = 0$, να δειχθεί ότι η $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, είναι ορθοκανονική βάση του H (δηλαδή η γραμμική θήκη των v_n είναι πυκνή στον H).

(**ii**) Εάν η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ορθοκανονική βάση του H και $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n - v_n\|^2 < 1$ να δειχθεί ότι και η $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ορθοκανονική βάση του H.