ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Πρόοδος-Άνοιξη 2010-Διδάσκων:Νίκος Φραντζικινάκης

Διάρκεια δύο ώρες με κλειστές όλες τις σημειώσεις. Καλή τύχη!!

(1) Να δειχθεί ότι ο γραμμικός υπόχωρος

$$Y = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \text{ συνεχής με } f(0) = 0\}$$

του $C[0,1]$, με την νόρμα $\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$ είναι πλήρης.

(2) Εάν $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κάποιο στοιχείο του l_∞ ορίζουμε

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n + x_{n+1}|.$$

(i) Να δειχθεί ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον l_∞ και ότι είναι ισοδύναμη με την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$.

(ii) Είναι ο $(l_\infty, \|\cdot\|)$ πλήρης; Είναι διαχωρίσιμος; Έχει βάση *Schauder*;

(3) Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο c_{00} των ακολουθιών οι οποίες είναι τελικά 0 με νόρμα την $\|\cdot\|_\infty$, και ορίζουμε

$$x_n = (0, \ldots, 0, \frac{1}{n^2}, 0 \ldots), \ n \in \mathbb{N}.$$

Να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty x_n$ συγκλίνει απολύτως ($\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|_\infty < \infty$) αλλά δεν συγκλίνει στον c_{00}. Τι συμπέρασμα βγάζετε για τον χώρο $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$;

(4) Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $P_n = \{p\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ πολυώνυμο βαθμού $\leq n\}$ με νόρμα

$$\|a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0\| = \max_{0\leq k\leq n} |a_k|.$$

Ορίζουμε τον γραμμικό τελεστή $T\colon P_n \to P_n$ ως εξής

$$(Tp)(t) = p'(t).$$

Να δειχθεί ότι ο T είναι φραγμένος και να υπολογίσετε την $\|T\|$.

(5) Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $C[0,1]$ με νόρμα $\|f\|_2 = (\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt)^{\frac{1}{2}}$. Ορίζουμε το γραμμικό συναρτησοειδές $F\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$ ως εξής

$$F(f) = \int_0^1 t \cdot f(t) \, dt.$$

Να δειχθεί ότι το F είναι φραγμένο και ότι $\|F\| = 1/\sqrt{3}$.

(6) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία απείρως παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $f^{(n_x)}(x) = 0$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $f^{(n)}(a) = 0$ για κάθε $n \geq n_0$.