

M2624 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ II
TEM-262 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ II
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2014
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2014 (50%)
11–ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ–2014

Θέμα 1 (1.5 M). Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας και $(N(t))_{t \geq 0}$ μια ανέλιξη Poisson με παράμετρο λ . Στη συνέχεια ορίζουμε τα σύνολα:

$$B_n(\tau) := \left(n \leq N(\tau) \leq n + 4 \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \tau > 0,$$

και

$$\Gamma_n(\tau) := \bigcup_{\ell=n}^{\infty} B_\ell(\tau) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \tau > 0.$$

Για κάθε $\tau > 0$, υπολογίστε την πιθανότητα

$$P \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(\tau) \right) = ?$$

Θέμα 2 (1.5 M). Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας και $(N(t))_{t \geq 0}$ μια ανέλιξη Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$. Αν $(\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ είναι οι χρόνοι αλλαγής τιμών της ανέλιξης Poisson, υπολογίστε την πιθανότητα:

$$P(1 \leq \xi_4 \leq 2).$$

Θέμα 3 (1 M). Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας, $(N(t))_{t \geq 0}$ μία ανέλιξη Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$. Ορίζουμε $g : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times (0, +\infty] \rightarrow [0, 1]$ ως εξής:

$$g(t, s) := P \left(N(t) = 5, N(s) = 6, N(\tau) = 7 \right) \quad \forall (t, s, \tau) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty).$$

Υπολογίστε όλες τις τιμές $g(t, s, \tau)$.

Θέμα 4 (1 M). Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας, $(W(t))_{t \geq 0}$ μία ανέλιξη Wiener.

α) Δείξτε ότι $\mathbb{E}[W(1)W(2)] = 1$.

β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(W(5) < W(3))$.

β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(W(2) \leq 1, W(4) \leq 2)$.

Παρατηρήσεις: Ο χρόνος που έχετε στη διάθεσή σας είναι 1 ώρα και 45 λεπτά. Δεν επιτρέπεται η έξοδος από την αίθουσα κατά τη διάρκεια της εξέτασης.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

1. Μία τυχαία μεταβλητή X έχει την κατανομή Poisson με παράμετρο $\alpha > 0$, όταν

$$P(X = m) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^m}{m!} \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Τότε $\mathbb{E}[X] = \alpha$ και $\mathbb{E}[X^2] = \alpha(\alpha + 1)$.

2. Μία τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\alpha > 0$, όταν

$$P(X \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Τότε $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\alpha}$ και $\mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{\alpha^2}$.

3. Μία τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την Κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$\rho(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Τότε $\mathbb{E}[X] = \mu$ και $\text{Var}[X] = \sigma^2$.

- 4.

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$