

M2624 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ II
TEM-262 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ II
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2014
ΕΝΔΙΑΜΕΣΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ (ΠΡΟΟΔΟΣ)
Α
15–ΜΑΙΟΥ–2014

Θέμα Α1 (1 Μ). Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας και $(N(t))_{t \geq 0}$ μια ανέλιξη Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$. Στη συνέχεια ορίζουμε τα σύνολα:

$$A_n(s) := (N(s) > n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall s > 0.$$

Για κάθε $s > 0$, υπολογίστε την πιθανότητα

$$P \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(s) \right) = ?$$

Θέμα Α2 (2 Μ). Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας, $(W(t))_{t \geq 0}$ μία ανέλιξη Wiener.

α) Δείξτε ότι $\mathbb{E}[W(1)W(2)] = 1$.

β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(W(2) \leq 1, W(3) \leq 2)$.

Θέμα Α3 (2 Μ). Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας και $(N(t))_{t \geq 0}$ μια ανέλιξη Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$.

α) Υπολογίστε την μέση τιμή $\mathbb{E}[N(2)N(3)]$.

β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(N(2) = 1, N(3) = 4)$.

γ) Αν $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι οι χρόνοι αλλαγής τιμών της ανέλιξης Poisson, υπολογίστε την πιθανότητα $P(1 \leq \xi_2 \leq 2)$.

Παρατηρήσεις: Η διάρκεια της εξέτασης είναι 1 ώρα και 15 λεπτά. Δεν επιτρέπεται η έξοδος από την αίθουσα κατά τη διάρκεια της εξέτασης.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

1. Μία τυχαία μεταβλητή X έχει την κατανομή Poisson με παράμετρο $\alpha > 0$, όταν

$$P(X = m) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^m}{m!} \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Τότε $\mathbb{E}[X] = \alpha$ και $\mathbb{E}[X^2] = \alpha(\alpha + 1)$.

2. Μία τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\alpha > 0$, όταν

$$P(X \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Τότε $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\alpha}$ και $\mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{\alpha^2}$.

3. Μία τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την Κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$\rho(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Τότε $\mathbb{E}[X] = \mu$ και $\text{Var}[X] = \sigma^2$.

- 4.

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$