Τμημα Μαθηματικων
και Εφαρμοσμενων
Μαθηματικων,
Πανεπιστημιο Κρητης,
Ηρακλειο Κρητης

ΜΕΜ-271 Διαφορικες Εξισωσεις
Εαρινο Εξαμηνο 2019
Εργαστηριο Ασκησεων 3

Άσκηση EL3.1. Βρείτε διάστημα I και συνάρτηση $y \in C^2(I, \mathbb{R})$ τέτοια ώστε:

$$y''(t) - 2\,y'(t) + y(t) = \tfrac{e^t}{t} \quad \forall\, t \in I,$$
$$y(-1) = 0, \quad y'(-1) = 1.$$

Άσκηση EL3.2. Βρείτε διάστημα I και συνάρτηση $y \in C^2(I, \mathbb{R})$ τέτοια ώστε:

$$y''(t) - y'(t) - 2\,y(t) = e^{3t} \quad \forall\, t \in I,$$
$$y(-1) = 0, \quad y'(-1) = 1.$$

Άσκηση EL3.3. Έστω συναρτήσεις $f, g \in C([-1,1], \mathbb{R})$ με $f(x) = x^3$ και $g(x) = |x^3|$ για κάθε $x \in [-1,1]$.

α) Δείξτε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

β) Δείξτε ότι

$$\det \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{pmatrix} = 0 \quad \forall\, t \in [-1,1].$$

γ) Δείξτε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι λύσεις της ΣΔΕ

$$y''(t) - \tfrac{2}{t}\, y'(t) = 0 \quad \forall\, t \in [-1,1].$$

δ) Υπάρχει κάποια αντίφαση στα παραπάνω αποτελέσματα;

Άσκηση EL3.4. Έστω g ένα πολυώνυμο βαθμού m. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $z_1(t) := \cos(t)\, g(t)$ και $z_2(t) := \sin(t)\, g(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες σε κάθε διάστημα I του $\mathbb{R}$.

Γ. Ζουράρης