

Άσκηση EL4.1. Βρείτε τη γενική λύση της ακόλουθης εξίσωσης Euler:

$$t^2 y''(t) + t y'(t) + y(t) = \ln^3(-t) + \ln(-t) \quad \forall t < 0.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε την αλλαγή μεταβλητής $x = \ln(-t)$.

Άσκηση EL4.2. Βρείτε τη γενική λύση της ακόλουθης ΣΔΕ:

$$t^2 y''(t) - 2t y'(t) + (t^2 + 2) y(t) = 0.$$

Υπόδειξη. Γράψτε τη λύση στη μορφή $y(t) = g(t) z(t)$ και προσδιορίστε τη συνάρτηση g έτσι ώστε η ΣΔΕ ως προς z να μην έχει όρο πρώτης τάξης.

Άσκηση EL4.3. Βρείτε τη γενική λύση της ακόλουθης Σ.Δ.Ε.

$$y'''(t) - 2y''(t) - 3y'(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση EL4.4. Βρείτε τη γενική λύση της ακόλουθης Σ.Δ.Ε.

$$y'''(t) + 2y''(t) + y'(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση EL4.5. Βρείτε τη γενική λύση της ακόλουθης Σ.Δ.Ε.

$$y'''(t) + 4y''(t) + 13y'(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση EL4.6. Βρείτε τη γενική λύση της ακόλουθης Σ.Δ.Ε.

$$y^{(4)}(t) + 4y^{(3)}(t) + 8y^{(2)}(t) + 8y^{(1)}(t) + 4y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Υπόδειξη. Αν p είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της Σ.Δ.Ε., βρείτε κατάλληλο πολυώνυμο q τέτοιο ώστε $p(x) = (q(x))^2$.

Άσκηση EL4.7. Βρείτε τη γενική λύση της ακόλουθης Σ.Δ.Ε.

$$y^{(5)}(t) - 2y^{(4)}(t) + 2y^{(3)}(t) - 4y^{(2)}(t) + y'(t) - 2y(t) = 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $m \in \mathbb{N}$ και πολυώνυμο $q(x) = x^m + \sum_{\ell=0}^{m-1} a_\ell x^\ell$, όπου $a_\ell \in \mathbb{Z}$ για $\ell = 0, \dots, m-1$. Τότε υποψήφιες ρητές ρίζες του q είναι οι αριθμοί $\pm \mu$ όπου μ είναι διαιρέτης του a_0 .

Γ. Ζουράρης