

Άσκηση EL 6.1. Βρείτε τη γενική λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών:

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y(t), \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

βασίζόμενοι στις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα του γραμμικού συστήματος.

Άσκηση EL 6.2. Βρείτε τη γενική λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών:

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -3 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ανάγοντάς το σε μια μη ομογενή, γραμμική, Σ.Δ.Ε. 2ης τάξης.

Άσκηση EL 6.3. Δίνεται η ακόλουθη δεύτερης τάξης γραμμική ΣΔΕ:

$$a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = 0$$

όπου a, b, c είναι πραγματικές σταθερές.

α) Γράψτε την παραπάνω ΣΔΕ ως 2×2 γραμμικό σύστημα 1ης τάξης.

β) Συγκρίνετε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της παραπάνω ΣΔΕ με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα του γραμμικού συστήματος το οποίο βρήκατε στα πλαίσια του ερωτήματος α).

Υπόδειξη. Για το (α) πρώτα ορίστε $z_1(t) := y(t)$ και $z_2(t) := y'(t)$, και στη συνέχεια βρείτε το σύστημα 1ης τάξης ως προς την $z(t) = (z_1(t), z_2(t))^T$.

Άσκηση EL 6.4. Βρείτε τη γενική λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών:

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} y(t), \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

βασίζόμενοι στις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα του γραμμικού συστήματος.

Γ. Ζουράρης