Τμημα Μαθηματικων
και Εφαρμοσμενων
Μαθηματικων,
Πανεπιστημιο Κρητης,
Ηρακλειο Κρητης

ΜΕΜ-271 Διαφορικες Εξισωσεις
Εαρινο Εξαμηνο 2019
Εργαστηριο Ασκησεων 7

Άσκηση EL 7.1. Βρείτε τη λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών:

$$u_t(t,x) + u_x(t,x) = x\,(1 + u(t,x)) \quad \forall\, t \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$
$$u(0,x) = \cos(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση EL 7.2. Βρείτε τη λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών:

$$u_t(t,x) - (t+x)\,u_x(t,x) = e^t\,(x - 1 + t) \quad \forall\, t \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$
$$u(0,x) = g(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Επιπλέον, γράψτε τον τύπο της λύσης όταν $g(x) = -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και όταν $g(x) = 2\,x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση EL 7.3. Βρείτε τη λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών:

$$u_t(t,x) + (t-x)\,u_x(t,x) = e^t\,(x + 1 - t) \quad \forall\, t \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$
$$u(0,x) = g(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση EL 7.4. Βρείτε τη λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών:

$$u_t(t,x) + u_x(t,x) + u(t,x) = e^{t+2x} \quad \forall\, t \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$
$$u(0,x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Υπόδειξη. Ορίστε $w(t,x) = e^t\,u(t,x)$ και βρείτε τη ΜΔΕ που ικανοποιεί η w. Στη συνέχεια βρείτε τον τύπο της w.

Άσκηση EL 7.5. Βρείτε τη λύση $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών:

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g(t) & 1 \end{pmatrix} y(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

όπου

$$g(t) := \begin{cases} 0, & \text{όταν} \quad t < 1 \\ -1, & \text{όταν} \quad t \geq 1 \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Γ. Ζουράρης