

1. Διατύπωση του προβλήματος. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, με $a < b$. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα δύο σημείων: ζητείται συνάρτηση $u \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} -(p u')' + \gamma u' + q u &= f \quad \text{στο } [a, b], \\ u(a) &= u(b) = 0, \end{aligned}$$

όπου: $f \in C[a, b]$, $q \in C[a, b]$, $p \in C^1[a, b]$ με $\inf_{[a, b]} p > 0$, και $\gamma \in C^1[a, b]$ με $\inf_{[a, b]} \gamma - \frac{1}{2} \gamma' > 0$.

2. Περιγραφή της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών. Έστω $J \geq 2$ φυσικός αριθμός που δίνεται από το χρήστη. Ορίζουμε το πλάτος της διαμέρισης $h := \frac{b-a}{J}$ για το διάστημα $[a, b]$ και τους αντίστοιχους κόμβους $x_j := a + j h$ για $j = 0, \dots, J$. Για $j = 0, \dots, J+1$, κατασκευάζουμε προσέγγιση U_j του $u(x_j)$, με βάση τις ακόλουθες απαιτήσεις:

$$\begin{aligned} & - \left(p_{j+\frac{1}{2}} \frac{U_{j+1}-U_j}{h^2} - p_{j-\frac{1}{2}} \frac{U_j-U_{j-1}}{h^2} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\gamma_{j+\frac{1}{2}} \frac{U_{j+1}-U_j}{h} + \gamma_{j-\frac{1}{2}} \frac{U_j-U_{j-1}}{h} \right) + q(x_j) U_j = f(x_j), \quad j = 1, \dots, J-1, \\ & U_0 = 0, \quad U_J = 0, \end{aligned}$$

όπου $p_{j+\frac{1}{2}} := p(x_j + \frac{h}{2})$, $p_{j-\frac{1}{2}} := p(x_j - \frac{h}{2})$, $\gamma_{j+\frac{1}{2}} := \gamma(x_j + \frac{h}{2})$ και $\gamma_{j-\frac{1}{2}} := \gamma(x_j - \frac{h}{2})$.

3. Αντικείμενο. Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο να υπολογίζει τις προσεγγίσεις $(U_j)_{j=1}^J$ της u που προσδιορίζονται από τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Για τη λύση του τριδιαγώνιου γραμμικού συστήματος που προκύπτει δοκιμάστε (όλες) τις ακόλουθες επιλογές:

α) Εφαρμόστε τον αλγόριθμο της απαλοιφής Gauss για τριδιαγώνια συστήματα.

β) Αποδείξτε ότι ο πίνακας του γραμμικού συστήματος έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο όταν το h είναι αρκετά μικρό. Τέλος, εφαρμόστε την επαναληπτική μέθοδο Gauss-Seidel μετρώντας παράλληλα το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτούνται για να ικανοποιηθεί το κριτήριο τερματισμού με μια δοθείσα τιμή tolerance π.χ. $\text{TOL} = 10^{-5}$.

4. Έλεγχος. Δοκιμάστε το πρόγραμμά σας με τα ακόλουθα δεδομένα: $a = 0$, $b = 1$, $p(x) = 1+x^2$, $\gamma(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$, $q(x) = 2+x$ και f τέτοια ώστε η συνάρτηση $u(x, t) = \sin(\pi x) (1-x)$ να είναι η ακριβής λύση του προβλήματος δύο σημείων.

Ο αριθμός π μπορεί να υπολογιστεί με τη χρήση κάποιας αντίστροφης τριγωνομετρικής συνάρτησης ή χρησιμοποιώντας μια προσέγγισή του με αρκετά δεκαδικά ψηφία όπως η ακόλουθη:

$$\pi \simeq 3.14159265358979323.$$

Επίσης, για να ελέγξετε ότι έχετε υλοποιήσει σωστά τον αλγόριθμο, φτιάξτε το πρόγραμμά σας έτσι ώστε να υπολογίζει και να τυπώνει στην οθόνη το σφάλμα προσέγγισης:

$$\mathcal{E}(J) := \max_{1 \leq j \leq J} |U_j^n - u(x_j)|.$$

Με τις τιμές του σφάλματος $\mathcal{E}(J)$ που θα πάρετε για διαφορετικές τιμές του J , επαληθεύστε πειραματικά την τάξη σύγκλισης της μεθόδου.

5. Προθεσμία-Παράδοση. Η προθεσμία είναι 2 εβδομάδες.

Θα μου στείλετε ηλεκτρονικά: i) το πρόγραμμά σας και ii) μια αναφορά στην οποία:

α) θα περιγράφετε το παράδειγμα που σας έδωσα με πλήρη περιγραφή της συνάρτησης f ,

β) θα περιγράψετε το κριτήριο τερματισμού που χρησιμοποιήσατε για τη μέθοδο Gauss-Seidel και την τιμή TOL που χρησιμοποιήσατε,

γ) θα παρουσιάσετε τα αποτελέσματά σας με ένα πίνακα ο οποίος στην 1η στήλη θα έχει τις τιμές $J = 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280$, στη 2η στήλη τα σφάλματα $\mathcal{E}(J)$ όταν χρησιμοποιείτε την απαλοιφή Gauss, στην 3η στήλη την αντίστοιχη πειραματική τάξη σύγκλισης ξεκινώντας από τη δεύτερη γραμμή, στην 4η στήλη τα σφάλματα $\mathcal{E}(J)$ όταν χρησιμοποιείτε την επαναληπτική μέθοδο Gauss-Seidel, στην 5η στήλη την αντίστοιχη πειραματική τάξη σύγκλισης ξεκινώντας από τη δεύτερη γραμμή, και στην 6η στήλη τον αριθμό επαναλήψεων της μεθόδου Gauss-Seidel.

δ) την απόδειξη που ζητείται στο 3.β πιο πάνω.

Γ. Ζουράρης