

Άσκηση 1.1. Έστω $p > 1$ και $m \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\|\cdot\|_p : \mathbb{C}^m \rightarrow [0, +\infty)$, με

$$\|v\|_p := \left(\sum_{\kappa=1}^m |v_\kappa|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall v \in \mathbb{C}^m,$$

είναι μια νόρμα στον γραμμικό χώρο $(\mathbb{C}^m, \mathbb{C})$.

Σημείωση. Να χρησιμοποιήσετε τεχνικές και αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στα πλαίσια του μαθήματος.

Άσκηση 1.2. Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Δείξτε ότι κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $(\mathbb{C}^m, \mathbb{K}, \|\cdot\|_\infty)$ είναι συμπαγές, όπου $\|z\|_\infty := \max_{1 \leq \kappa \leq m} |z_\kappa|$ για κάθε $z \in \mathbb{C}^m$.

Υπόδειξη. Εφαρμόστε κατάλληλα το Θεώρημα Heine-Borel για τον χώρο $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$ ή ακολουθήστε την απόδειξή του.

Άσκηση 1.3. Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $\mathbb{P}^m[0, 1]$ είναι το σύνολο των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με m τα οποία ορίζονται στο $[0, 1]$ και έχουν πραγματικούς συντελεστές.

α) Δείξτε ότι το σύνολο

$$K := \left\{ p \in \mathbb{P}^m[0, 1] : p(t) = \sum_{\kappa=0}^m a_\kappa t^\kappa \quad \mu\epsilon \quad \max_{0 \leq \kappa \leq m} |a_\kappa| \leq 1 \right\}$$

είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $(C[0, 1], \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$ όπου $\|f\|_\infty := \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$.

β) Έστω $T : C([0, 1]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$T(f) := \int_0^1 f(t) dt \quad \forall f \in C([0, 1]; \mathbb{R}).$$

Δείξτε ότι υπάρχουν $p_A, p_B \in K$ τέτοια ώστε $T(p_A) = \max_{p \in K} T(p)$ και $T(p_B) = \min_{p \in K} T(p)$. Μπορείτε να βρείτε τα p_A και p_B ;

Άσκηση 1.4. Έστω $(X, \mathbb{K}, \|\cdot\|)$ ένας $\mathbb{K}$ -γραμμικός χώρος με $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $T : X \rightarrow [0, +\infty)$ με $T(x) = \|x\|$ για κάθε $x \in X$, είναι συνεχής.

Άσκηση 1.5 : Έστω $(X, \mathbb{K}, \|\cdot\|)$ ένας $\mathbb{K}$ -γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα. Δείξτε ότι για κάθε νόρμα ν του $(X, \mathbb{K})$ υπάρχουν σταθερές $C_A > 0$ και $C_B > 0$ τέτοιες ώστε:

$$C_A \|x\| \leq \nu(x) \leq C_B \|x\| \quad \forall x \in X \setminus \{0\}$$

Υπόδειξη. Διαιρέστε όλα τα μέλη της ανισότητας με $\|x\|$. Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε αποτελέσματα από τη θεωρία του 1ου Κεφαλαίου.

Άσκηση 1.6 : Έστω $p > 1$. Σύμφωνα με την ανισότητα Young ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \quad \forall x \geq 0, y \geq 0,$$

όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Δείξτε ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x^p = y^q$.

Υπόδειξη. Εξετάστε την περίπτωση $x > 0$ και ορίστε $g(y) := \frac{x^{p-1}}{p} + \frac{y^q}{q} - y$ για κάθε $y \geq 0$. Στη συνέχεια μελετήστε την g .

Άσκηση 1.7. Έστω $(X, \mathbb{K}, \|\cdot\|)$ ένας $\mathbb{K}$ -γραμμικός χώρος με $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $R > 0$ και

$$B = \{x \in X : \|x\| \leq R\}.$$

α) Δείξτε ότι το B είναι κλειστό.

β) Δείξτε ότι για κάθε $x \in X \setminus B$ ισχύει ότι $\text{dist}(x, B) = \|x\| - R$.

γ) Βρείτε $x^* \in B$ τέτοιο ώστε $\|x - x^*\| = \text{dist}(x, B)$.

Υπόδειξη. Σκεφτείτε τι ισχύει στην περίπτωση $(X, \mathbb{K}, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$ όπου $\|\cdot\|_2$ η Ευκλείδεια νόρμα.

Γ. Ζουράρης