

Άσκηση 2.1. Έστω $(X, \mathbb{R}, \|\cdot\|) = (C([0, 1]; \mathbb{R}), \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$,

$$B := \{g \in C([0, 1]; \mathbb{R}) : \exists \beta > 0 \text{ τέτοιο ώστε } g(x) = e^{\beta x} \quad \forall x \in [0, 1]\}$$

και $f \in C([0, 1]; \mathbb{R})$ με $f(x) = \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

α) Δείξτε ότι: $\text{dist}(f, B) = 0$.

β) Εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει $g^* \in B$ τέτοιο ώστε $\|f - g^*\|_\infty = \inf_{g \in B} \|f - g\|_\infty$.

Άσκηση 2.2. Σας ζητάνε να υπολογίσετε μια προσέγγιση της σειράς

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Τι θα κάνετε;

Υπόδειξη. Διαβάστε το κείμενο του Εργαστηρίου 2.

Άσκηση 2.3. Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $B = \{t^\ell : \ell = 0, \dots, m\}$. Δείξτε ότι τα στοιχεία του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ως στοιχεία του γραμμικού χώρου $(C([a, b]; \mathbb{R}), \mathbb{R})$.

Άσκηση 2.4. Θεωρούμε τις νόρμες $\|\cdot\|_\infty$ και $\|\cdot\|_1$ ορισμένες στο γραμμικό χώρο $(\mathbb{C}^m, \mathbb{C})$. Εξετάστε αν είναι αυστηρά κυρτές.

Άσκηση 2.5. Έστω $m \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$ με $N > m$, και $(x_j)_{j=1}^N \subset \mathbb{R}$ τα οποία είναι ανα δύο διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε το γραμμικό χώρο $(\mathbb{P}^m, \mathbb{R})$ και την απεικόνιση $\nu : \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\nu(p) := \sum_{j=1}^N |p(x_j)| \quad \forall p \in \mathbb{P}^m.$$

α) Δείξτε ότι η ν είναι μια νόρμα στο $(\mathbb{P}^m, \mathbb{R})$.

β) Εξετάστε αν η ν είναι αυστηρά κυρτή.

γ) Έστω $m = 1$, $N = 2$, $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$. Έστω ακόμα $f \in \mathbb{P}^1$ με $f(x) = x$. Βρείτε $p^* \in \mathbb{P}^0$ τέτοιο ώστε $\nu(f - p^*) = \inf_{q \in \mathbb{P}^0} \nu(f - q)$. Είναι το p^* μοναδικό;

Άσκηση 2.6. Έστω $m \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$ με $N > m$, και $(x_j)_{j=1}^N \subset \mathbb{R}$ τα οποία είναι ανα δύο διαφορετικά μεταξύ τους. Αν $(p^\ell)_{\ell=1}^{m+1}$ είναι μια βάση του $\mathbb{P}^m$, τότε τα διανύσματα $(y^\ell)_{\ell=1}^{m+1}$ με

$$y_i^\ell = p^\ell(x_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad \ell = 1, \dots, m+1,$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άσκηση 2.7. Στο χώρο $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$ προσδιορίστε όλες τις βέλτιστες προσεγγίσεις του $x = (1, 2, 3)^T$ από τον υπόχωρο

$$Y = \{(\alpha, \beta, 0)^T \in \mathbb{R}^3 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Πως εξηγείται το γεγονός ότι υπάρχουν πολλές βέλτιστες προσεγγίσεις;

Άσκηση 2.8. Στο γραμμικό χώρο $(C([1, 2]; \mathbb{R}), \mathbb{R})$ ορίζουμε τον υπόχωρο $Y = \text{span}\{p\}$ όπου $p : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $p(x) = x$ για κάθε $x \in [1, 2]$. Προσδιορίστε τη βέλτιστη προσέγγιση της συνάρτησης $q : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $q(x) = x^3$, από τον υπόχωρο Y , ως προς τις νόρμες $\|\cdot\|_\infty$ και $\|\cdot\|_1$.