

**Άσκηση 3.1.** Έστω  $(X, \mathbb{K}, (\cdot, \cdot)) = (C^1([-1, 1]; \mathbb{R}), \mathbb{R}, (\cdot, \cdot)_1)$ , όπου

$$(f, g)_1 := \int_{-1}^1 f'(x) g'(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx \quad \forall f, g \in C^1([-1, 1]; \mathbb{R}).$$

Χρησιμοποιείστε τον αλγόριθμο Gram-Schmidt βασισμένο στο εσωτερικό γινόμενο  $(\cdot, \cdot)_1$  για να ορθοκανονικοποιήσετε τα πολυώνυμα  $\{1, t, t^2, t^3\}$ . Συγκρίνετε τα πολυώνυμα που βρήκατε με τα αντίστοιχα πολυώνυμα Legendre.

**Άσκηση 3.2.** Έστω  $(X, \mathbb{K}, (\cdot, \cdot)) = (C([0, 1]; \mathbb{R}), \mathbb{R}, (\cdot, \cdot))$  με

$$(f, g) := \int_0^1 f(x) g(x) dx \quad \forall f, g \in C([0, 1]; \mathbb{R}),$$

και έστω  $\|\cdot\|$  η νόρμα που παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο  $(\cdot, \cdot)$ .

α) Έστω  $g \in C([0, 1]; \mathbb{R})$  με  $g(x) = e^x$  για κάθε  $x \in [0, 1]$ . Ελέγξτε αν το πολυώνυμο  $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$  είναι η βέλτιστη προσέγγιση της  $g$  από τον  $\mathbb{P}^2[0, 1]$  ως προς τη νόρμα  $\|\cdot\|$ .

β) Για κάθε  $n \in \mathbb{N}_0$ , έστω  $p_n^* \in \mathbb{P}^n$  η βέλτιστη προσέγγιση της συνάρτησης  $g$  από τον  $\mathbb{P}^n[0, 1]$  ως προς τη νόρμα  $\|\cdot\|$ . Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g - p_n^*\| = 0.$$

*Υπόδειξη.* Χρησιμοποιήστε ότι η σειρά  $S = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell}{\ell!}$  συγκλίνει ομοιόμορφα στην  $g$ .

**Άσκηση 3.3.** Έστω  $(X, \mathbb{R}, (\cdot, \cdot))$  χώρος με εσωτερικό γινόμενο και  $\|\cdot\|$  η παραγόμενη από το εσωτερικό γινόμενο νόρμα. Ακόμη, έστω  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in X$  και  $(x_j)_{j=1}^n$  γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του  $X$ . Στη συνέχεια ορίζουμε απεικόνιση  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$G(z) := \left\| x - \sum_{j=1}^n z_j x_j \right\|^2 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Έστω  $Y = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$  και  $z^* \in \mathbb{R}^n$  τέτοιο ώστε  $x^* = \sum_{j=1}^n z_j^* x_j$  να είναι η βέλτιστη προσέγγιση του  $x$  από το  $Y$  ως προς τη νόρμα  $\|\cdot\|$ . Δείξτε ότι

$$\nabla G(z^*) = 0.$$

**Άσκηση 3.4.** Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο  $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$  εφοδιασμένο με τη Ευκλείδεια νόρμα  $\|\cdot\|_2$ , για την οποία  $\|x\|_2 := \left( \sum_{n=1}^4 |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^4$ . Βρείτε τη βέλτιστη προσέγγιση του  $x = (1, 2, 3, 5)^T$  από τον υπόχωρο  $Z := \{z \in \mathbb{R}^4 : z_4 = 0\}$  ως προς τη νόρμα  $\|\cdot\|_2$ .

**Άσκηση 3.5.** Έστω  $(P_n)_{n=1}^{\infty}$  τα πολυώνυμα Legendre στο  $[-1, 1]$ . α) Για κάθε  $n \in \mathbb{N}_0$ , βρείτε την τιμή  $\|P_n\|$  όπου  $\|f\| := \left( \int_{-1}^1 f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$  για κάθε  $f \in C([-1, 1]; \mathbb{R})$ .

β) Για κάθε  $n, m \in \mathbb{N}_0$  υπολογίστε την ποσότητα:  $I_{n,m} := \int_{-1}^1 P_n'(t) P_m'(t) dt$ .

**Άσκηση 3.6.** Έστω  $p : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $p(x) = 5x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5x + 1$  για κάθε  $x \in [-1, 1]$ . Βρείτε τη βέλτιστη προσέγγιση του  $p$  από τον  $(\mathbb{P}^3[-1, 1], \mathbb{R})$  ως προς τη νόρμα  $\|\cdot\|$  για την οποία  $\|f\| := \left( \int_{-1}^1 f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$  για κάθε  $f \in C([-1, 1]; \mathbb{R})$ .

**Άσκηση 3.7.** Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων βρείτε τη βέλτιστη προσέγγιση των σημείων  $(x_1, y_1) = (1, 2)$ ,  $(x_2, y_2) = (2, 1)$ ,  $(x_3, y_3) = (3, 3)$  από α) τον  $\mathbb{P}^1$  και β) από τον  $\mathbb{P}^2$ . Κάντε ένα γράφημα των παραπάνω σημείων και των πολυωνύμων που βρήκατε.

*Υπόδειξη.* Διαβάστε το κείμενο του Εργαστηρίου 4.

Γ. Ζουράρης