

Άσκηση 4.1. Έστω $f \in C([0, 1]; \mathbb{R})$ με $f(t) = \sqrt{t}$ για κάθε $t \in [0, 1]$ και $B_n f$ το πολυώνυμο Bernstein το οποίο αντιστοιχεί στην f .

α) Δείξτε ότι η f δεν είναι Lipschitz στο $[0, 1]$.

β) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\max_{t \in [0, 1]} |f(t) - (B_n f)(t)| \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Άσκηση 4.2. Έστω $f \in C([0, 1]; \mathbb{R})$ η οποία είναι Hölder συνεχής με εκθέτη $\alpha \in (0, 1)$, δηλ. υπάρχει $L \geq 0$ τέτοιο ώστε:

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in [0, 1].$$

Αν $B_n f$ είναι το πολυώνυμο Bernstein το οποίο αντιστοιχεί στην f , δείξτε ότι υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\max_{t \in [0, 1]} |f(t) - (B_n f)(t)| \leq C n^{-\frac{\alpha}{2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Υπόδειξη. Εφαρμόστε κατάλληλα την ανισότητα Hölder για αθροίσματα.

Άσκηση 4.3. Έστω $n \in \mathbb{N}_0$ και $(B_\ell^n)_{\ell=0}^n$ η βάση πολυωνύμων Bernstein βαθμού n , δηλ.

$$B_\ell^n(t) := \binom{n}{\ell} t^\ell (1-t)^{n-\ell} \quad \forall t \in [0, 1], \quad \ell = 0, \dots, n.$$

α) Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $(B_\ell^n)_{\ell=0}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες ως στοιχεία του $(C([0, 1]; \mathbb{R}), \mathbb{R})$.

β) Δείξτε ότι

$$\int_0^1 B_\ell^n(t) dt = \frac{1}{n+1} \quad \ell = 0, \dots, n.$$

γ) Δείξτε ότι

$$B_\ell^{n-1}(t) = \frac{n-\ell}{n} B_\ell^n(t) + \frac{\ell+1}{n} B_{\ell+1}^n(t) \quad \forall t \in [0, 1], \quad \ell = 0, \dots, n-1.$$

δ) Δείξτε ότι

$$(B_\ell^n)'(t) = n [B_{\ell-1}^{n-1}(t) - B_\ell^{n-1}(t)], \quad \ell = 1, \dots, n.$$

Άσκηση 4.4. Έστω $f \in C([0, 1]; \mathbb{R})$ και $B_n f$ το πολυώνυμο Bernstein το οποίο αντιστοιχεί στην f .

α) Δείξτε ότι αν η f είναι μονότονη στο $[0, 1]$, τότε η $B_n f$ είναι μονότονη.

β) Βρείτε τις τιμές $B_n f(0)$, $B_n f(1)$, $(B_n f)'(0)$ και $(B_n f)'(1)$.

Υπόδειξη. Για το ερώτημα (α) χρησιμοποιήστε το (δ) της Άσκησης 4.3.

Άσκηση 4.5. Έστω $f \in C([0, 1]; \mathbb{R})$ με $f(t) = t^3$ για κάθε $t \in [0, 1]$ και $B_n f$ το πολυώνυμο Bernstein το οποίο αντιστοιχεί στην f . Δείξτε ότι το $B_n f$ είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Εκτιμήστε το σφάλμα $E = \max_{t \in [0, 1]} |f(t) - B_n f(t)|$.

Άσκηση 4.6. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $B = B(t)$ μια καμπύλη Bézier βαθμού n με σημεία ελέγχου $(b_\ell)_{\ell=0}^n$. Έστω $\Gamma = \Gamma(t)$ η καμπύλη Bézier βαθμού $n+1$ με σημεία ελέγχου $(\gamma_\ell)_{\ell=0}^{n+1}$ τα οποία ορίζονται ως εξής: $\gamma_0 := b_0$, $\gamma_{n+1} := b_n$ και

$$\gamma_\ell := \left(1 - \frac{\ell}{n+1}\right) b_\ell + \frac{\ell}{n+1} b_{\ell-1}, \quad \ell = 1, \dots, n.$$

Δείξτε ότι $\Gamma(t) = B(t)$ για κάθε $t \in [0, 1]$.

Άσκηση 4.7. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $B = B(t)$ μια καμπύλη Bézier βαθμού n με σημεία ελέγχου $(b_\ell)_{\ell=0}^n$. Δείξτε ότι

$$B'(t) = n \sum_{\ell=0}^{n-1} (b_{\ell+1} - b_\ell) B_\ell^{n-1}(t) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Επιπλέον, δείξτε ότι

$$B''(t) = n(n-1) \sum_{\ell=0}^{n-2} (b_{\ell+2} - 2b_{\ell+1} + b_\ell) B_\ell^{n-2}(t) \quad \forall t \in [0, 1]$$

όταν $n \geq 2$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το (δ) της Άσκησης 4.3.

Γ. Ζουράρης