

Άσκηση 5.1. Έστω $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ με

$$f(x) = 5x^7 + 6x^6 + 3x^4 + 2x - 1 \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Προσδιορίστε τη βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της συνάρτησης f από τον $\mathbb{P}^6[-1, 1]$.

Άσκηση 5.2. Έστω $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ με

$$f(x) = 3x^3 + 2x - 1 \quad \forall x \in [0, 1].$$

Προσδιορίστε τη βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της συνάρτησης f από τον $\mathbb{P}^2[0, 1]$.

Υπόδειξη. Κάντε αναγωγή του προβλήματος στο διάστημα $[-1, 1]$.

Άσκηση 5.3. Δείξτε ότι τα πολυώνυμα Chebyshev πρώτου είδους έχουν την ακόλουθη ιδιότητα:

$$(1 - x^2) T_n''(x) - x T_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Άσκηση 5.4. Έστω διάστημα $[a, b]$, $J \in \mathbb{N}$ με $J \geq 2$ και $\Delta = (x_i)_{i=0}^J$ οι κόμβοι μιας διαμέρισης του $[a, b]$, δηλ. $a = x_0$, $b = x_J$ και $x_i < x_{i+1}$ για $i = 0, \dots, J-1$. Στη συνέχεια ορίζουμε το ακόλουθο γραμμικό χώρο συναρτήσεων:

$$S^{2,0}(\Delta) := \left\{ s \in C([a, b]; \mathbb{R}) : s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}^2[x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \dots, J-1 \right\}.$$

α) Έστω $x_{i+\frac{1}{2}} := \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ για $i = 0, \dots, J-1$. Δείξτε ότι για κάθε $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση $s \in S^{2,0}(\Delta)$ τέτοια ώστε

$$(1) \quad s(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, J, \quad s(x_{i+\frac{1}{2}}) = f(x_{i+\frac{1}{2}}), \quad i = 0, \dots, J-1.$$

β) Βρείτε μια βάση του $S^{2,0}(\Delta)$. Ποιά είναι η διάστασή του $S^{2,0}(\Delta)$;

γ) Έστω ότι $f \in C^3([a, b]; \mathbb{R})$ και $s \in S^{2,0}(\Delta)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες (1). Βρείτε μια εκτίμηση για την $\max_{[a, b]} |f - s|$.

Υπόδειξη. Για το ερώτημα (β) χρησιμοποιήστε το (α).

Άσκηση 5.5. Έστω $D = [a, b] \times [c, d]$, $f \in C(D; \mathbb{R})$, $(x_*, y_*) = (\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2})$ και $p : D \mapsto \mathbb{R}$ με $p(x, y) = f(x_*, y_*)$ για κάθε $(x, y) \in D$. Δείξτε ότι:

$$\max_D |f - p| \leq \frac{1}{2} \left[\max_D |\partial_x f| (b - a)^2 + \max_D |\partial_y f| (d - c)^2 \right].$$

Άσκηση 5.6. Έστω $D = [a, b] \times [c, d]$, $(x_i)_{i=1}^3 \subset [a, b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, $(y_j)_{j=1}^2 \subset [a, b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους και

$$Q^{2,1} := \text{span}\{x^m y^n : 0 \leq m \leq 2, 0 \leq n \leq 1\}.$$

α) Αν $f \in C(D; \mathbb{R})$, δείξτε ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση $q \in Q^{2,1}$ τέτοια ώστε

$$q(x_i, y_j) = f(x_i, y_j), \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2.$$

β) Βρείτε ένα τύπο για την q .

γ) Αν $f \in C^{3,2}(D; \mathbb{R})$. Βρείτε μια παράσταση για το σφάλμα $f - p$.