

**Θέμα 1 [2.0].** Έστω  $(X, \mathbb{K}) = (C^1([0, 1]; \mathbb{R}), \mathbb{R})$  και απεικόνιση  $(\cdot, \cdot) : X \times X \mapsto \mathbb{R}$  με

$$(f, g) = \int_0^1 f'(x) g'(x) dx + f(1) g(1) \quad \forall f, g \in X.$$

Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα:

α) Δείξτε ότι η  $(\cdot, \cdot)$  είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον  $(X, \mathbb{K})$ .

β) Έστω  $Y = \text{span}\{x, x^3\}$  ένας διανυσματικός υπόχωρος του  $X$  και  $f \in X$  με

$$f(x) = x^4 \quad \forall x \in [0, 1].$$

Βρείτε τη βέλτιστη προσέγγιση της  $f$  από τον υπόχωρο  $Y$  ως προς τη νόρμα  $\|\cdot\|$  η οποία παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο  $(\cdot, \cdot)$ .

**Θέμα 2 [2.0].** Έστω  $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$  με  $f(x) = 3x^4 + 2x^3$  για κάθε  $x \in [-1, 1]$ . Προσδιορίστε τη βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της συνάρτησης  $f$  από τον  $\mathbb{P}^3[-1, 1]$ .

**Θέμα 3 [1.5].** Έστω  $f \in C([0, 1]; \mathbb{R})$  για την οποία υπάρχει ακολουθία  $(f_n)_{n=1}^\infty$  στοιχείων του  $C([0, 1]; \mathbb{R})$  τέτοια ώστε:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$ . Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - B_n(f_n)\|_\infty = 0.$$

*Σημείωση.* Για κάθε  $g \in C([0, 1]; \mathbb{R})$  ορίζουμε  $\|g\|_\infty := \max_{x \in [0, 1]} |g(x)|$  και  $B_n(g)$  είναι το πολυώνυμο Bernstein βαθμού  $n$  της συνάρτησης  $g$ .

**Θέμα 4 [0.5].** Έστω  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 0)$  και  $C = (\frac{1}{2}, 1)$ . Ποιά είναι η καμπύλη Bezier βαθμού 2 η οποία αντιστοιχεί στα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $C$ .

**Θέμα 5 [2.0].** Έστω  $I = [0, 1]$  και  $\Delta = (x_i)_{i=0}^5$  μια διαμέριση του  $I$  με 6 κόμβους, δηλ.  $x_0 = 0$ ,  $x_5 = 1$  και  $x_i < x_{i+1}$  για  $i = 0, \dots, 4$ . Στη συνέχεια ορίζουμε το σύνολο

$$S(\Delta) := \{s \in C([0, 1]; \mathbb{R}) : s|_{[x_0, x_1]} \in \mathbb{P}^1, \quad s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}^2 \text{ για } i = 1, 2, 3, \quad s|_{[x_4, x_5]} \in \mathbb{P}^1\}.$$

Έστω  $x_{i+\frac{1}{2}} := \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$  για  $i = 1, \dots, 3$ . Δείξτε ότι για κάθε  $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$  υπάρχει μοναδική συνάρτηση  $s \in S(\Delta)$  τέτοια ώστε

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, 5, \quad s(x_{i+\frac{1}{2}}) = f(x_{i+\frac{1}{2}}), \quad i = 1, \dots, 3.$$

Επιπλέον, αν  $f \in C^3([0, 1]; \mathbb{R})$ , βρείτε ένα φράγμα για το σφάλμα

$$E := \int_0^1 |f(x) - s(x)| dx.$$

το οποίο να εξαρτάται από παραγώγους της  $f$  και την ποσότητα  $\Delta x = \max_{0 \leq i \leq 4} (x_{i+1} - x_i)$ .

**Άσκηση 6 [2.0].** Στο διανυσματικό χώρο  $(X, \mathbb{K}) = (\mathbb{P}^3[0, 1], \mathbb{R})$  ορίζουμε τη νόρμα  $\|f\| := \int_0^1 |p(x)| dx$  για κάθε  $p \in X$ . Επιπλέον, ορίζουμε το σύνολο

$$B := \{p \in X : p(t) = at^3 + bt + c \text{ με } |a| + |b| + |c| \leq 1\}$$

και το συναρτησιακό  $T : X \mapsto \mathbb{R}$  με  $T(g) = \int_0^1 g(x) dx$  για κάθε  $g \in X$ .

α) Δείξτε ότι το  $B$  είναι συμπαγές υποσύνολο του  $(X, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ .

β) Δείξτε ότι υπάρχει  $p_* \in B$  τέτοιο ώστε  $T(p_*) = \max_{p \in B} T(p)$ .

*Υπόδειξη.* Για το (α) χρησιμοποιήστε τον ορισμό της συμπαγείας.

**Τυπολόγιο**

**Πολυώνυμα Chebyshev.**

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad \text{και} \quad T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad \forall n \geq 2.$$

Γ. Ζουράρης