

1. Υπολογισμός τιμών πολυωνύμων

1.1. Πολύωνυμα.

Έστω m ένας μη αρνητικός ακέραιος. Με $\mathbb{P}^m$ συμβολίζουμε το σύνολο των πολυωνύμων με βαθμό μικρότερο ή ίσο με m . Έστω, $p \in \mathbb{P}^m$ με

$$(1) \quad p(x) = \sum_{\ell=0}^m a_{\ell} x^{m-\ell},$$

όπου $(a_{\ell})_{\ell=0}^m$ είναι πραγματικοί αριθμοί με $a_0 \neq 0$. Είναι γνωστό, από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αλγεβρας, ότι το p έχει ακριβώς m ρίζες $(\rho_{\ell})_{\ell=1}^m \subset \mathbb{C}$ οι οποίες δεν είναι αναγκαστικά ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους. Τότε το πολυώνυμο p γράφεται ως εξής:

$$(2) \quad p(x) = a_0 \prod_{\ell=1}^m (x - \rho_{\ell}).$$

1.2. Υπολογιστικό κόστος.

Βλέπουμε ότι αν χρησιμοποιήσουμε τη μορφή (2) για τον υπολογισμό της τιμής $p(x)$, τότε θα απαιτηθεί η εκτέλεση m πολλαπλασιασμών και m αφαιρέσεων. Όμως υπάρχει το πρακτικό πρόβλημα ότι οι ρίζες ενός πολυωνύμου δεν είναι πάντα διαθέσιμες και ούτε είναι εύκολο να υπολογιστούν αριθμητικά.

Χρησιμοποιώντας τη μορφή (1), θα απαιτηθεί η εκτέλεση m προσθέσεων και $(2m - 1)$ πολλαπλασιασμών, το οποίο επιτυγχάνεται γράφοντας τον τύπο (1) με τη μορφή

$$(3) \quad p(x) = \sum_{\ell=0}^m a_{\ell} \gamma_{m-\ell}$$

όπου

$$\gamma_0 := 1, \quad \gamma_{\kappa+1} = x \gamma_{\kappa}, \quad \kappa = 0, \dots, m-1.$$

Ένα πρόβλημα που μπορεί να προκύψει με τον παραπάνω αλγόριθμο είναι όταν ο εκθέτης κ είναι μεγάλος και η τιμή $|x|$ είναι μικρή τότε η τιμή $\gamma_{\kappa} = x^{\kappa}$ μπορεί να ξεπεράσει τα όρια της αριθμητικής.

Υπάρχει ένας αλγόριθμος που επιτρέπει τον υπολογισμό της τιμής ενός πολυωνύμου το οποίο δίνεται στη μορφή (1) και ο οποίος απαιτεί m πολλαπλασιασμούς και m προσθέσεις. Αυτός ο αλγόριθμος είναι γνωστός ως μέθοδος Horner, ο οποίος, επιπλέον, αποφεύγει τον άμεσο υπολογισμό δυνάμεων του x .

1.3. Μέθοδος Horner. Για να γίνει κατανοητή η μέθοδος, ας περιοριστούμε στην περίπτωση $m = 3$, όπου, σύμφωνα με τη μορφή (1) του πολυωνύμου p , έχουμε

$$p(x) = a_3 + a_2 x + a_1 x^2 + a_0 x^3.$$

Κινούμενοι από αριστερά προς τα δεξιά βγάζουμε σταδιακά κοινό παράγοντα το x και έτσι καταλήγουμε στη μορφή

$$p(x) = a_3 + x (a_2 + x (a_1 + a_0 x)).$$

Η κεντρική ιδέα της μεθόδου είναι ότι πίσω από ένα πολυώνυμο m βαθμού κρύβονται τα πολυώνυμα

$$p_{\kappa}(x) = \sum_{\ell=0}^{\kappa} a_{\ell} x^{\kappa-\ell} \in \mathbb{P}^{\kappa}, \quad \kappa = 0, \dots, m,$$

τα οποία ικανοποιούν την ακόλουθη αναδρομική σχέση:

$$(4) \quad \begin{aligned} p_0(x) &:= a_0, \\ p_{\kappa+1}(x) &= a_{\kappa+1} + x p_{\kappa}(x), \quad \kappa = 0, \dots, m-1, \end{aligned}$$

η οποία είναι η μέθοδος Horner.

Ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε για τον υπολογισμό της τιμής $p'(x)$ η οποία σύμφωνα με τον μορφή (1) δίνεται από τον τύπο:

$$p'(x) = \sum_{\ell=0}^{m-1} [(m-\ell) a_{\ell}] x^{m-1-\ell}.$$

Επειδή $p \in \mathbb{P}^{m-1}$, μια απλή ιδέα είναι να υπολογίσουμε τους συντελεστές $(a_{\ell}(m-\ell))_{\ell=0}^{m-1}$, μια διαδικασία που απαιτεί $(m-1)$ πολλαπλασιασμούς, και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Horner η οποία θα απαιτήσει επιπλέον $(m-1)$ πολλαπλασιασμούς και $(m-1)$ προσθέσεις, δηλ. συνολικά θα απαιτηθούν $2(m-1)$ πολλαπλασιασμοί και $(m-1)$ προσθέσεις. Το επίφοβο σημείο της διαδικασίας αυτής είναι ότι αν το m είναι μεγάλος αριθμός τότε ο συντελεστής $(a_{\ell}(m-\ell))$ μπορεί να γίνει πολύ μεγαλύτερος από τον a_{ℓ} κάτι που μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα overflow ή underflow. Ένας τρόπος για να το αποφύγουμε αυτό είναι να προσπαθήσουμε να βρούμε ένα αναδρομικό τύπο για την $p'(x)$. Πράγματι, παραγωγίζοντας μία φορά τους τύπους του αναδρομικού τύπου (4) έχουμε:

$$(5) \quad \begin{aligned} p'_1(x) &:= a_0, \\ p'_{\kappa+1}(x) &= p_{\kappa}(x) + x p'_{\kappa}(x), \quad \kappa = 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι ο υπολογισμός του $p'(x) = p'_m(x)$ απαιτεί: τον υπολογισμό των $(p_{\kappa}(x))_{\kappa=1}^{m-1}$ ο οποίος απαιτεί (με τη μέθοδο Horner) $(m-1)$ πολλαπλασιασμούς και $(m-1)$ προσθέσεις, και επιπλέον $(m-1)$ πολλαπλασιασμούς και $(m-1)$ προσθέσεις, δηλ. συνολικά θα απαιτηθούν $2(m-1)$ πολλαπλασιασμοί και $2(m-1)$ προσθέσεις. Επειδή, το κόστος εκτέλεσης ενός πολλαπλασιασμού αριθμών διπλής ακρίβειας είναι περίπου 10–15 φορές μεγαλύτερο από το κόστος εκτέλεσης μιας πρόσθεσης αριθμών διπλής ακρίβειας, το επιπλέον κόστος σε προσθέσεις του αλγορίθμου (5) μπορεί να θεωρηθεί σχετικά αμελητέο.

2. Αντικείμενο εργαστηρίου

Γράψτε ένα πρόγραμμα (python) το οποίο να υλοποιεί τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1. Να δέχεται ως είσοδο: α) την περιγραφή ενός πολυωνύμου p με βαθμό $m \geq 0$ και συντελεστές $(a_{\ell})_{\ell=0}^m$, και β) ένα πραγματικό αριθμό x .

Βήμα 2. Υλοποιήστε τη μέθοδο Horner (4) για τον υπολογισμό της τιμής $p(x)$ σε μορφή υποπρογράμματος function.

Βήμα 3. Υλοποιήστε (χωριστά από το Βήμα 2) τη μέθοδο Horner (4) μαζί με την (5) για τον υπολογισμό της τιμής $p'(x)$, σε μορφή υποπρογράμματος function.

Παράδειγμα. Δοκιμάστε το πρόγραμμά σας με το πολυώνυμο

$$p(x) = 5x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 0.5x - 1.$$

3. Διερεύνηση

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ιδέες, σκεφτείτε πως μπορείτε να υπολογίσετε την δεύτερη παράγωγο $p''(x)$ ή το ολοκλήρωμα $\int_a^b p(x) dx$ ενός πολυωνύμου p .

Βιβλιογραφία. Germund Dahlquist and Åke Björk, Numerical Methods, Dover Publications.

Γ. Ζουράρης