

2. Παραδείγματα Αριθμητικής Προσέγγισης Σειρών

2.1. Σειρές μη αρνητικών αριθμών.

Έστω $n_0 \in \mathbb{N}_0$ και μια ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n=n_0}^\infty$ για την οποία υποθέτουμε ότι η αντίστοιχη σειρά

$$S := \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$

συγκλίνει. Καθώς η τιμή της S μπορεί να υπολογιστεί σε λίγες σχετικές περιπτώσεις, είναι λογικό να αναρωτηθούμε πως θα μπορούσαμε να βρούμε μια προσεγγιστική τιμή για την S . Μια πρώτη ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της σύγκλισης μιας σειράς, σύμφωνα με τον οποίο $S := \lim_{m \rightarrow \infty} S^m$, όπου

$$S^m := \sum_{n=n_0}^m a_n \quad \forall m \geq n_0.$$

Επειδή η ακολουθία $(a_n)_{n=n_0}^\infty$ έχει μη αρνητικούς όρους η ακολουθία $(S^m)_{m=n_0}^\infty$ των μερικών αθροισμάτων της σειράς είναι αύξουσα, δηλ. $S^m \leq S^{m+1}$ για κάθε $m \geq n_0$ και επομένως συγκλίνει μονότονα προς την S , δηλ. $S^m \leq S^{m+1} \leq S$ για κάθε $m \geq n_0$. Έτσι, για αρκετά μεγάλο m , το S^m μπορεί να είναι μια καλή προσέγγιση της S .

Ο υπολογισμός των μερικών αθροισμάτων μπορεί να γίνει εύκολα με τον ακόλουθο αναδρομικό τύπο:

$$\begin{aligned} S^{n_0} &= a_{n_0} \\ S^{m+1} &= a_{m+1} + S^m \quad \forall m \geq n_0, \end{aligned}$$

όμως χρειαζόμαστε ένα κριτήριο τερματισμού. Ένα τέτοιο κριτήριο θα μπορούσε να είναι η απαίτηση

$$(1) \quad |S^m - S^{m-\kappa}| \leq \text{TOL}$$

όπου κ ένας δοθέντας θετικός ακέραιος και TOL ένας μικρός θετικός ακέραιος αριθμός. Το παραπάνω κριτήριο τερματισμού εγγυάται ότι

$$||S - S^m| - |S - S^{m-\kappa}|| \leq \text{TOL},$$

αλλά δεν μας δίνει κάποια πληροφορία για το μέγεθος του σφάλματος $|S - S^m|$.

Στη συνέχεια θα συζητήσουμε κάποιες περιπτώσεις σειρών για τις οποίες μπορούμε να κατασκευάσουμε ακολουθίες $(L^m)_{m=n_0}^\infty$ και $(U^m)_{m=n_0}^\infty$ τέτοιες ώστε:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} L^m = \lim_{m \rightarrow \infty} U^m = 0$$

και

$$L^m \leq S - S^m \leq U^m \quad \forall m \geq n_0,$$

οι οποίες μας επιτρέπουν να βρούμε μια καλύτερη εκτίμηση για το σφάλμα $S - S^m$ και κατά συνέπεια μια καλύτερη προσέγγιση της τιμής S .

2.2. Σειρές που σχετίζονται με το κριτήριο του ολοκληρώματος.

Υποθέτουμε ότι

$$a_n = f(n) \quad \forall n \geq n_0,$$

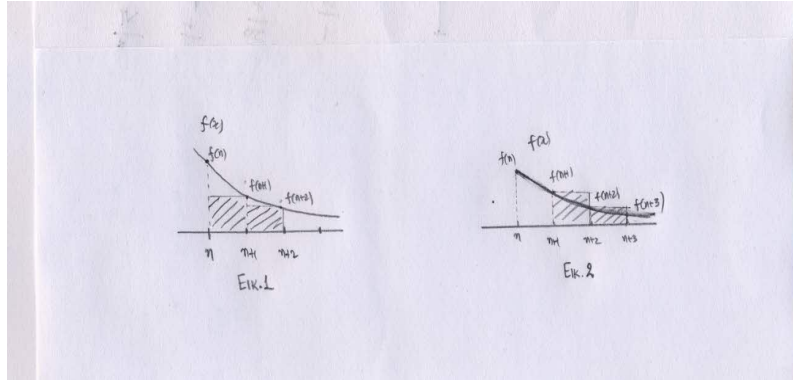
όπου $f \in C([1, \infty), [0, \infty))$ μια φθίνουσα συνάρτηση με την ιδιότητα

$$(2) \quad \int_1^{\infty} f(x) dx < +\infty.$$

Επιπλέον, το σφάλμα προσέγγισης της S από το μερικό άθροισμα S^m δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$(3) \quad E^m := S - S^m = \sum_{n=m+1}^{\infty} f(n) \quad \forall m \geq n_0.$$

Επειδή η f είναι φθίνουσα (βλ. ΣΧΗΜΑ 1) συμπεραίνουμε ότι



ΣΧΗΜΑ 1. Σειρά και Ολοκλήρωμα

$$(4) \quad \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x) dx \quad \forall n \geq n_0 + 1.$$

Από τις (3) και (4) έπεται

$$\int_{m+1}^{\infty} f(x) dx =: L^m \leq E^m \leq U^m := \int_m^{\infty} f(x) dx \quad \forall m \geq n_0 + 1,$$

που μας οδηγεί στο συμπέρασμα

$$|E^m - \frac{L^m + U^m}{2}| \leq \sigma_m := \frac{U^m - L^m}{2} \quad \forall m \geq n_0.$$

Επομένως το κριτήριο τερματισμού

$$(5) \quad \boxed{\sigma_m \leq \text{TOL}}$$

μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι

$$|S - (S^m + \frac{L^m + U^m}{2})| \leq \text{TOL},$$

όπου, τελικά, η τιμή S προσεγγίζεται από την ποσότητα

$$(6) \quad \boxed{\hat{S}^m := S^m + \frac{L^m + U^m}{2}}.$$

Εφαρμογή 1. Έστω ότι έχουμε τη σειρά

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

που αντιστοιχεί στην επιλογή $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Με βάση τα παραπάνω, έχουμε

$$U^m = \frac{1}{m}, \quad L^m := \frac{1}{m+1}, \quad \sigma_m = \frac{1}{2m(m+1)}.$$

Αντικείμενο Εργαστηρίου: Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο να βρίσκει προσέγγιση $\hat{S}^m$ της S με βάση τον τύπο (6) και εφαρμόζοντας το κριτήριο τερματισμού (5). Διαπιστώστε ότι όταν $\text{TOL} = 10^{-4}$ τότε οι επαναλήψεις σταματούν όταν $m = 71$. Ποιό είναι το αντίστοιχο πραγματικό σφάλμα $S - \hat{S}^m = \frac{\pi^2}{6} - \hat{S}^m$; Ποιό είναι το αντίστοιχο σφάλμα $E^m = S - S^m = \frac{\pi^2}{6} - S^m$; Ποιά είναι καλύτερη προσέγγιση του S η ποσότητα $\hat{S}^m$ ή η ποσότητα S^m ; Για ποιά τιμή του m τερματίζεται ο υπολογισμός του S^m όταν εφαρμόζεται το κριτήριο (1) και ποιό είναι το αντίστοιχο σφάλμα $E^m = S - S^m = \frac{\pi^2}{6} - S^m$;

Διερεύνηση: Δοκιμάστε την παραπάνω μεθοδολογία για άλλες σειρές όπως π.χ. η $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\frac{1}{10})}$.

2.2. Σειρές που σχετίζονται με το κριτήριο της σύγκρισης.

Έστω ότι έχουμε μια ακολουθία $(b_n)_{n=n_0}^{\infty}$ θετικών αριθμών τέτοια ώστε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = L \in (0, +\infty).$$

όπου $\gamma_n := \frac{a_n}{b_n}$ για κάθε $n \geq n_0$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας ακολουθίες $(\hat{U}^m)_{m=n_0}^{\infty}$ και $(\hat{L}^m)_{m=n_0}^{\infty}$ τέτοιες ώστε: $\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{L}^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \hat{U}^m = 0$ και

$$\hat{L}^m \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n \leq \hat{U}^m \quad \forall m \geq n_0.$$

Διακρίνουμε στη συνέχεια τις ακόλουθες περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $(\gamma_n)_{n=n_0}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Τότε $\gamma_n \leq L$ για κάθε $n \geq n_0$,

$$E^m = \sum_{n=m+1}^{\infty} \gamma_n b_n \leq L \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n \leq L \hat{U}^m \quad \forall m \geq n_0$$

και

$$E^m = \sum_{n=m+1}^{\infty} \gamma_n b_n \geq \gamma_{m+1} \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n \geq \gamma_{m+1} \hat{L}^m \quad \forall m \geq n_0.$$

Έτσι καταλήγουμε στις τιμές $\boxed{U^m = L \hat{U}^m}$ και $\boxed{L^m = \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} \hat{L}^m}$ για κάθε $m \geq n_0$.

Περίπτωση 2. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $(\gamma_n)_{n=n_0}^{\infty}$ είναι φθίνουσα. Τότε $\gamma_n \geq L$ για κάθε $n \geq n_0$,

$$E^m = \sum_{n=m+1}^{\infty} \gamma_n b_n \geq L \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n \geq L \hat{L}^m \quad \forall m \geq n_0$$

και

$$E^m = \sum_{n=m+1}^{\infty} \gamma_n b_n \leq \gamma_{m+1} \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n \leq \gamma_{m+1} \hat{U}^m \quad \forall m \geq n_0.$$

Έτσι καταλήγουμε στις τιμές $\boxed{U^m = \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} \hat{U}^m}$ και $\boxed{L^m = L \hat{L}^m}$ για κάθε $m \geq n_0$.

Εφαρμογή 2. Έστω ότι έχουμε $a_n := \frac{1}{2n^2+3n+1}$ για κάθε $n \geq 1$. Διαλέγουμε $b_n = \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \geq 1$. Έτσι $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L = \frac{1}{2}$. Επειδή η ακολουθία $(\frac{a_n}{b_n})_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα, υπαγόμαστε στην Περίπτωση 1 πιο πάνω. Από την Εφαρμογή 1, έχουμε ότι $\hat{U}^m = \frac{1}{m}$ και $\hat{L}^m = \frac{1}{m+1}$, και επομένως

$$U^m = \frac{1}{2m}, \quad L^m := \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} \frac{1}{m+1}.$$

Αντικείμενο Εργαστηρίου: Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο να βρίσκει προσέγγιση $\hat{S}^m$ της σειράς

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+3n+1}$$

με βάση τον τύπο (6) και εφαρμόζοντας το κριτήριο τερματισμού (5).

Διερεύνηση: Δοκιμάστε την παραπάνω μεθοδολογία για άλλες σειρές όπως π.χ. η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2-3}$.

Βιβλιογραφία. Bart Braden, Calculating Sums of Infinite Series, The American Mathematical Monthly, vol. 99, no. 7, pp. 649-655 (1992).

Γ. Ζουράρης