

3. Υπολογισμός βέλτιστης προσέγγισης από υπόχωρο όταν η νόρμα παράγεται από εσωτερικό γινόμενο

3.1. Θεωρητικό πλαίσιο.

Έστω ότι $(X, \mathbb{R}, (\cdot, \cdot))$ ένας $\mathbb{R}$ -γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, Y ένας υπόχωρος του X με πεπερασμένη διάσταση $N \in \mathbb{N}$ και $x \in X$. Η βέλτιστη προσέγγιση $y^* \in Y$ του x από το Y , ως προς τη νόρμα που παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο, προσδιορίζεται από την απαίτηση:

$$(1) \quad (y^*, y) = (x, y) \quad \forall y \in Y.$$

Έχοντας διαλέξει μια βάση $\mathcal{B} = (y_\kappa)_{\kappa=1}^N$ του Y , τότε υπάρχουν $(a_\kappa)_{\kappa=1}^N \subset \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$(2) \quad y^* = \sum_{\kappa=1}^N a_\kappa y_\kappa$$

τα οποία προσδιορίζονται, μέσω της (1), ως λύση του ακόλουθου γραμμικού συστήματος:

$$(3) \quad \sum_{\kappa=1}^N a_\kappa (y_\kappa, y_j) = (x, y_j), \quad j = 1, \dots, N,$$

του οποίου ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος. Όταν η βάση είναι ορθοκανονική τότε

$$(4) \quad a_\kappa = (x, y_\kappa), \quad \kappa = 1, \dots, N.$$

3.2. Υπολογίζοντας προσεγγίσεις ολοκληρωμάτων.

Έστω ότι έχουμε συνάρτηση $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$ και θέλουμε να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα $I := \int_a^b f(x) dx$. Ο κανόνας του Simpson προσεγγίζει το I με την ποσότητα:

$$Q([a, b], f) := \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)]$$

και είναι ακριβής για όλα τα πολώνυμα τρίτου βαθμού. Στη συνέχεια, θεωρούμε μια ομοιόμορφη διαμέριση του $[a, b]$ σε $J \in \mathbb{N}$ υποδιαστήματα, με πλάτος $dx := \frac{b-a}{J}$ και κόμβους $x_j := a + j dx$ για $j = 0, \dots, J$. Ο σύνθετος κανόνας του Simpson προσεγγίζει το I με την ποσότητα:

$$\begin{aligned} G([a, b], J, f) &:= \sum_{j=0}^{J-1} Q([x_j, x_{j+1}], f) \\ &= \frac{dx}{6} \left[f(a) + 4 \sum_{j=0}^{J-1} f\left(x_j + \frac{dx}{2}\right) + 2 \sum_{j=1}^{J-1} f(x_j) + f(b) \right]. \end{aligned}$$

Ένας τρόπος για να υπολογίσουμε μια προσέγγιση του I με το σύνθετο κανόνα του Simpson, με έλεγχο ακρίβειας, είναι ο ακόλουθος:

Βήμα 1. Διαλέγουμε $TOL > 0$, $J_* \in \mathbb{N}$ και θέτουμε $J_1 := 2J_*$. Έπειτα υπολογίζουμε τα $I_* := G([a, b], J_*, f)$ και $I_1 := G([a, b], J_1, f)$. Τέλος, ορίζουμε το σφάλμα $E_1 := |I_* - I_1|$. Αν $E_1 \leq TOL$ τότε σταματάμε, διαφορετικά συνεχίζουμε στο Βήμα 2.

Βήμα 2. Για $i \geq 2$, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} J_i &:= 2 J_{i-1}, \\ I_i &:= G([a, b], J_i, f), \\ E_i &:= |I_i - I_{i-1}|. \end{aligned}$$

Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν $E_i \leq \text{TOL}$.

3.3. Εφαρμογή. Θεωρούμε τον χώρο $(C([-1, 1]; \mathbb{R}), \mathbb{R}, (\cdot, \cdot))$ με

$$(f, g) := \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt \quad \forall f, g \in C([-1, 1]; \mathbb{R}).$$

Εφαρμογή I. Για δοθέν $m \in \mathbb{N}$, έστω A_m υπόχωρος του $(C([-1, 1]; \mathbb{R}), \mathbb{R})$ με βάση

$$\mathcal{B}_m := \{\sin(\ell \pi t) : \ell = 1, \dots, m\}$$

η οποία είναι ορθοκανονική. Έτσι, ο A_m έχει διάσταση $N = m$. Η βέλτιστη προσέγγιση $f_m^* \in A_m$ μιάς συνάρτησης $f \in C([-1, 1]; \mathbb{R})$ από τον A_m είναι ένα μερικό άθροισμα της σειράς Fourier ημιτόνων της f .

α) Υπολογίστε τη βέλτιστη προσέγγιση $f_m^* \in A_m$ της $f(x) = |x| \sin(x)$ από τον A_m , χρησιμοποιώντας τις (2) και (4). Στη συνέχεια κάνετε γράφημα της f μαζί με εκείνο της f_m^* για αυξανόμενες τιμές του m .

β) Επίσης ελέγξτε πειραματικά αν υπάρχει κάποιο $\gamma > 0$ τέτοιο ώστε: για κάποιες θετικές σταθερές C_1 και C_2 να ισχύει

$$(5) \quad C_1 \frac{1}{\kappa^\gamma} \leq |a_\kappa| \leq C_2 \frac{1}{\kappa^\gamma} \quad \forall \kappa \geq 1.$$

Αυτό μπορεί να γίνει υπολογίζοντας την ποσότητα

$$(6) \quad O_\kappa := \frac{\ln\left(\frac{|a_\kappa|}{|a_{2\kappa}|}\right)}{\ln(2)}$$

για διαδοχικές τιμές του κ .

Σημείωση. Ο τύπος (6) προκύπτει παρατηρώντας ότι: αν ισχύει η (5), τότε αναμένουμε να ισχύει η σχέση $\frac{|a_\kappa|}{|a_{2\kappa}|} \simeq \frac{(2\kappa)^\gamma}{\kappa^\gamma} = 2^\gamma$, η οποία λογαριθμίζοντας δίνει $O_\kappa \simeq \gamma$.

Εφαρμογή II. Για δοθέν $m \in \mathbb{N}$, έστω Y_m υπόχωρος του $(C([-1, 1]; \mathbb{R}), \mathbb{R})$ με βάση

$$\mathcal{B}_m := \{1\} \cup \{a^{\ell t} : \ell = 1, \dots, m\} \cup \{a^{-\ell t} : \ell = 1, \dots, m\}$$

όπου $a = \frac{1}{2}$. Έτσι ο υπόχωρος Y_m έχει διάσταση $N = 2m + 1$.

Λύνοντας το γραμμικό σύστημα (3) (π.χ. με την `np.linalg.cholesky`), βρείτε τη βέλτιστη προσέγγιση $g_m^* \in Y_m$ της συνάρτησης $g(x) = \cos(x)$ από τον Y_m . Στη συνέχεια κάνετε γράφημα της g μαζί με εκείνο της g_m^* για αυξανόμενες τιμές του m .

Διερεύνηση: Ποιά είναι η βέλτιστη προσέγγιση μιας άρτιας συνάρτησης από τον υπόχωρο A_m ; Δοκιμάστε τα προγράμματά σας με άλλες συναρτήσεις και με άλλους υπόχωρους π.χ. $Y = \mathbb{P}^m$, ή, $Y = Y_m$ με άλλη θετική τιμή για το a .

Γ. Ζουράρης