

5. Υπολογισμός καμπυλών Bézier

5.1. Θεωρητικό πλαίσιο. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε η βάση πολυωνύμων Bernstein βαθμού n αποτελείται από τις συναρτήσεις

$$B_\ell^n(t) := \binom{n}{\ell} t^\ell (1-t)^{n-\ell} \quad \forall t \in [0, 1], \quad \ell = 0, \dots, n,$$

και η καμπύλη Bézier με σημεία ελέγχου $(b_\ell)_{\ell=0}^n \subset \mathbb{R}^2$ ορίζεται από τον τύπο

$$B(t) := \sum_{\ell=0}^n b_\ell B_\ell^n(t) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Ο υπολογισμός των τιμών της καμπύλης B γίνεται με τον αλγόριθμο De Casteljau ο οποίος έχει την ακόλουθη μορφή:

Βήμα 1. Διαλέγουμε $t_0 \in [0, 1]$ και θέτουμε

$$\gamma_\ell^0 := b_\ell, \quad \ell = 0, \dots, n.$$

Βήμα 2. Για $m = 1, \dots, n$, υπολογίζουμε

$$\gamma_\ell^m := (1-t_0)\gamma_\ell^{m-1} + t_0\gamma_{\ell+1}^{m-1}, \quad \ell = 0, \dots, n-m.$$

Βήμα 3. $B(t_0) = \gamma_0^n$.

5.2. Αντικείμενο Εργαστηρίου.

- Γράψτε ένα υποπρόγραμμα το οποίο να δέχεται ως είσοδο τις τιμές $t_0, n, (b_\ell)_{\ell=0}^n$, και να επιστρέφει την τιμή $B(t_0)$. Τις συντεταγμένες των $(b_\ell)_{\ell=0}^n$ μπορείτε να τις αποθηκεύσετε σε ένα πίνακα διαστάσης $(n+1) \times 2$.
- Στη συνέχεια κάνετε ένα γράφημα των σημείων $(b_\ell)_{\ell=0}^n$ και την καμπύλη B .

5.3. Εφαρμογή.

1. Υπολογίστε την καμπύλη B με σημεία ελέγχου: $b_0 = (0, 0)$, $b_1 := (5, 0)$, $b_2 := (3, 3)$.
2. Υπολογίστε την καμπύλη B με σημεία ελέγχου: $b_0 = (3, 4)$, $b_1 := (5, 2)$, $b_3 := (5, -2)$, $b_4 := (3, -4)$.
3. Υπολογίστε την καμπύλη B με σημεία ελέγχου: $b_0 = (0, 0)$, $b_1 := (5, 0)$, $b_3 := (2.5, 4)$, $b_4 := (7.5, 4)$.

5.3. Διερεύνηση.

α) Έστω $n \geq 3$ και $t_i = i \frac{2\pi}{n+1}$ για $i = 0, \dots, n+1$. Ορίστε $b_i = (\cos(t_i), \sin(t_i))$ για $i = 0, \dots, n$. Σχεδιάστε την καμπύλη B για αυξανόμενες τιμές του n .

β) Δοκιμάστε το πρόγραμμά σας για διαφορετικές επιλογές σημείων ελέγχου.

Βιβλιογραφία: Duncan Marsh, Applied Geometry for Computer Graphics and CAD, Springer-Verlag, 2005.

Γ. Ζουράρης