

6. Η μέθοδος Remez

6.1. Θεωρητικό πλαίσιο. Έστω $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$ με $N \geq n + 1$ και σημεία $(x_i)_{i=1}^N \subset [a, b]$ τέτοια ώστε $x_i < x_{i+1}$ για $i = 1, \dots, N - 1$. Επιπλέον έστω $(\varphi_i)_{i=1}^n$ μια βάση του $\mathbb{P}^{n-1}$.

Ο σκοπός μας είναι να βρούμε πολυώνυμο $p \in \mathbb{P}^{n-1}$ τέτοιο ώστε:

$$\max_{1 \leq i \leq N} |p(x_i) - f(x_i)| = \min_{q \in \mathbb{P}^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq N} |q(x_i) - f(x_i)|.$$

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο του Remez η οποία έχει την ακόλουθη μορφή:

Βήμα 1. Λύνουμε το $(n + 1) \times (n + 1)$ γραμμικό σύστημα:

$$\sum_{\ell=1}^n c_{\ell}^{(0)} \varphi_{\ell}(x_i) + (-1)^i c_{n+1}^{(0)} = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n + 1.$$

Στη συνέχεια θέτουμε $d = |c_{n+1}^{(0)}|$ και $p^* \in \mathbb{P}^{n-1}$ με

$$p^*(x) = \sum_{\ell=0}^n c_{\ell}^{(0)} \varphi_{\ell}(x).$$

Έπειτα βρίσκουμε $\kappa \in \{n + 2, \dots, N\}$ τέτοιο ώστε

$$|f(x_{\kappa}) - p^*(x_{\kappa})| = \max_{n+2 \leq i \leq N} |f(x_i) - p^*(x_i)|.$$

Αν $|f(x_{\kappa}) - p^*(x_{\kappa})| \leq d$ τότε **σταματάμε**, διαφορετικά ορίζουμε μια ομάδα σημείων $(z_i)_{i=1}^{n+1}$ ως εξής:

Αν $\text{sgn}(f(x_{n+1}) - p^*(x_{n+1})) = \text{sgn}(f(x_{\kappa}) - p^*(x_{\kappa}))$ τότε θέτουμε: $z_i = x_i$ για $i = 1, \dots, n$ και $z_{n+1} := x_{\kappa}$, διαφορετικά θέτουμε: $z_i = x_{i+1}$ για $i = 1, \dots, n$, $z_{n+1} := x_{\kappa}$.

Βήμα 2. Για $m \geq 1$, λύνουμε το $(n + 1) \times (n + 1)$ γραμμικό σύστημα:

$$\sum_{\ell=1}^n c_{\ell}^{(m)} \varphi_{\ell}(z_i) + (-1)^i c_{n+1}^{(m)} = f(z_i), \quad i = 1, \dots, n + 1.$$

Στη συνέχεια θέτουμε $d = |c_{n+1}^{(m)}|$ και $p^* \in \mathbb{P}^{n-1}$ με

$$p^*(x) = \sum_{\ell=0}^n c_{\ell}^{(m)} \varphi_{\ell}(x).$$

Έπειτα βρίσκουμε $\kappa \in \{1, \dots, N\}$ τέτοιο ώστε

$$|f(x_{\kappa}) - p^*(x_{\kappa})| = \max_{1 \leq i \leq N} |f(x_i) - p^*(x_i)|.$$

Αν $|f(x_{\kappa}) - p^*(x_{\kappa})| \leq d$ τότε **σταματάμε**, διαφορετικά ορίζουμε μια νέα ομάδα σημείων $(z_i)_{i=1}^{n+1}$ ως εξής:

Περίπτωση 2.1. $\boxed{x_{\kappa} > z_{n+1}}$

Αν $\text{sgn}(f(z_{n+1}) - p^*(z_{n+1})) = \text{sgn}(f(x_{\kappa}) - p^*(x_{\kappa}))$ τότε θέτουμε: $z_{n+1} := x_{\kappa}$, διαφορετικά θέτουμε: $z_i = z_{i+1}$ για $i = 1, \dots, n$, $z_{n+1} := x_{\kappa}$.

Περίπτωση 2.2. $\boxed{x_{\kappa} < z_1}$

Αν $\text{sgn}(f(z_1) - p^*(z_1)) = \text{sgn}(f(x_{\kappa}) - p^*(x_{\kappa}))$ τότε θέτουμε: $z_1 := x_{\kappa}$, διαφορετικά θέτουμε: $z_i = z_{i-1}$ για $i = n + 1, \dots, 2$ και $z_1 := x_{\kappa}$.

Περίπτωση 2.3. $\boxed{z_{i_0} < x_\kappa < z_{i_0+1}}$

Αν $\text{sgn}(f(z_{i_0}) - p^*(z_{i_0})) = \text{sgn}(f(x_\kappa) - p^*(x_\kappa))$ τότε θέτουμε: $z_{i_0} := x_\kappa$, διαφορετικά θέτουμε: $z_{i_0+1} := x_\kappa$.

6.2. Αντικείμενο Εργαστηρίου.

- Γράψτε πρόγραμμα το οποίο να υλοποιεί τη μέθοδο του Remez χρησιμοποιώντας τη βάση: $\varphi_\ell(x) = x^{\ell-1}$ για $\ell = 1, \dots, n$. Επίσης επιλέξτε $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [0, 2\pi]$, $n = 4$, $N = 20$, και $x_i = i h$ για $i = 1, \dots, N$, όπου $h = \frac{2\pi}{N+2}$.

- Στη συνέχεια κάνετε ένα γράφημα των σημείων $(x_i)_{i=1}^{n+1}$ μαζί με το πολυώνυμο p^* το οποίο έχει υπολογιστεί με το τέρματισμό του αλγορίθμου.

Παρατήρηση: Το διάνυσμα z περιέχει $n+1$ στοιχεία των $(x_i)_{i=1}^N$ σε αύξουσα διάταξη. Επομένως, μπορούμε να δούμε το z ως διάνυσμα δεικτών, δηλ. αντί λέμε ότι τα στοιχεία είναι $z_1, \dots, z_{n+1}$ μπορούμε να λέμε ότι τα στοιχεία είναι $x_{z(1)}, \dots, x_{z(n+1)}$.

6.3. Διερεύνηση. Η προτεινόμενη υλοποίηση του αλγορίθμου δεν είναι η πιο οικονομική. Μπορείτε να εντοπίσετε σε ποια σημεία μπορεί να βελτιωθεί;

Γ. Ζουράρης