

Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ (MEM-108)

Εμβόλιμη εξέταση 28/5/2024. Διδάσκων: Γρηγόρης Φουρνόδαυλος

Συνολικές μονάδες: 10. Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες.

Θέμα 1 (2,5 μονάδες) Αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης στα παρακάτω ολοκληρώματα και υπολογίστε τα:

$$\int_0^3 \int_{-x^2}^0 xy \, dy \, dx, \quad \int_0^1 \int_1^{e^{2x}} x \log y \, dy \, dx.$$

Θέμα 2 (2,5 μονάδες) Έστω $a, b, c > 0$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iiint_{\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \, dx \, dy \, dz$$

κάνοντας κατάλληλες αλλαγές μεταβλητών.

Θέμα 3 (2,5 μονάδες) (i) Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_c 2xyz \, dx + x^2z \, dy + x^2y \, dz,$$

όπου c είναι μια καμπύλη που πάει από το σημείο $(1, 1, 1)$ στο σημείο $(1, 2, 4)$.

(ii) Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_c y \, dx - x \, dy,$$

όπου η καμπύλη c διανύει μια φορά την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$, με φορά αντίστροφη των δεικτών του ρολογιού.

Θέμα 4 (2,5 μονάδες) Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

όπου $\mathbf{F} = (z, x, yz)$ και ∂W είναι το σύνορο του χωρίου $W = \{x^2 + y^2 \leq z \leq 1, y \geq 0\}$.

[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το θεώρημα απόκλισης του Gauss.]