Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ (ΜΕΜ-108)

Ενδιάμεση εξέταση 4/11/2023. Διδάσκων: Γρηγόρης Φουρνόδαυλος

Συνολικές μονάδες: 10. Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες.

Θέμα 1 (2,5 μονάδες) (i) *Υπολογίστε τα ολοκληρώματα*

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 (x^2 + y^3 x)\,dx\,dy, \qquad \int_0^4 \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} dx\,dy.$$

(ii) *Αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης στα από πάνω ολοκληρώματα και ξανά υπολογίστε τα. (1,5 μονάδες)*

Θέμα 2 (2,5 μονάδες) (i) *Βρείτε τον όγκο της περιοχής* $W \subset \mathbb{R}^3$ *που φράσσεται από το υπερβολοειδές* $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ *και το επίπεδο* $z = 2$.

(ii) *Υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης* $f(x, y, z) = x$ *στο* W. *(1 μονάδα).*

Θέμα 3 (2,5 μονάδες) (i) *Αποφανθείτε κατά πόσο οι παρακάτω απεικονίσεις είναι 1-1 και επί:*

$$\begin{aligned} &S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad S(x, y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \\ &T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(x, y, z) = (xy, yz, xz) \end{aligned}$$

(ii) *Βρείτε ένα γραμμικό μετασχηματισμό* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *που πηγαίνει το τετράγωνο* $[0, 1]^2$ *στο παραλληλόγραμμο με κορυφές* $(0, 0), (2, 0), (1, 2), (3, 2)$ *(1,5 μονάδες).*

Θέμα 4 (2,5 μονάδες) (i) *Βρείτε τον όγκο της περιοχής που ορίζεται από την ανισότητα*

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2$$

(ii) *Υπολογίστε το καταχρηστικό τριπλό ολοκλήρωμα*

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{[1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}]^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz$$

[Υπόδειξη: Θεωρήστε κατάλληλες αλλαγές συντεταγμένων και για τα 2 υποερωτήματα.]