Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ (ΜΕΜ-108)

Τελική εξέταση 8/1/2024. Διδάσκων: Γρηγόρης Φουρνόδαυλος

Συνολικές μονάδες: 10. Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες.

Θέμα 1 (2,5 μονάδες) (i) *Έστω ο γραμμικός μετασχηματισμός*

$$x(u,v) = \frac{u-v}{2}, \qquad y(u,v) = \frac{u+v}{2}.$$

Υποθέτοντας ότι τρίγωνα μετασχηματίζονται σε τρίγωνα και κορυφές αντιστοιχούν σε κορυφές, μέσω του προηγούμενου μετασχηματισμού, να βρεθεί το τρίγωνο D^* *του επιπέδου* u, v *που έχει εικόνα στο επίπεδο* x, y *το τρίγωνο* D *με κορυφές τα σημεία* $(0,0), (0,1), (1,0)$.

(ii) *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$\int\int_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy,$$

όπου D *είναι όπως στο ερώτημα* (i), *κάνοντας κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών* $x(u,v), y(u,v)$.

[Υπόδειξη: Ολοκληρώστε μέσα ως προς v *και έξω ως προς* u.*]*

Θέμα 2 (2,5 μονάδες) *Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα:*

(i) $\int_c f ds$, *όπου* $f(x,y,z) = y^{-3}$ *και* $c(t) = (\log t, t, 2)$, $t \in [1, e]$.

(ii) $\int_c F \cdot ds$, *όπου* $F(x,y) = (y^3, 3xy^2)$, *και* c *είναι το σύνορο του τετραγώνου με κορυφές* $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$.

Θέμα 3 (2,5 μονάδες) (i) *Υπολογίστε το εμβαδόν της επιφάνειας* S *με παραμετρικοποίηση*

$$\Phi(u,v) = (u\cos v, u \sin v, u^2), \qquad u \in [0,2],\ v \in [0, 2\pi].$$

(ii) *Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα* $\int_S F \cdot dS$ *για* $F = (x,y,z)$ *και* $S = \{x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

Θέμα 4 (2,5 μονάδες) *Χρησιμοποιήστε το θεώρημα Stokes για να υπολογίσετε το επιφανειακό ολοκλήρωμα*

$$\int\int_S (\nabla \times F) \cdot n dS, \qquad F(x,y,z) = (y, -x, zx^3y^2), \qquad S = \{x^2+y^2+3z^2 = 1,\ z \le 0\},$$

όπου n *είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της* S *που δείχνει προς το* $(0,0,0)$.