Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (ΜΕΜ-272)

Εμβόλιμη εξέταση 6/6/2023. Διδάσκων: Γρηγόρης Φουρνόδαυλος

Συνολικές μονάδες: 12. Μέγιστος τελικός βαθμός: 10. Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες.

Θέμα 1 (2 μονάδες) (i) *Βρείτε 2 διαφορετικές λύσεις του ΠΑΤ* $y' = y^{\frac{1}{3}}$, $y(0) = 0$. *Γιατί δεν ισχύει η μοναδικότητα λύσεων του θεωρήματος Picard;*

(ii) *Δείξτε ότι το ΠΑΤ* $y' = |\sin y|$, $y(0) = y_0$, *έχει μοναδική λύση σε γειτονιά του* $t = 0$.
[Υπόδειξη: Επιβεβαιώστε ότι ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Picard.]

Θέμα 2 (2 μονάδες) *Έστω* $y_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, *ακολουθία λύσεων των ΠΑΤ:*

$$y_n' = \sin\frac{y_n}{n} + \frac{2-n}{n}y_n, \qquad y_n(0) = \frac{2n-1}{n}, \qquad t \in [a, b].$$

(i) *Δείξτε ότι η ακολουθία* $y_n(t)$ *συγκλίνει για κάθε* $t \in [a, b]$ *και υπολογίστε το όριο* $y(t)$.
[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το θεώρημα συνεχούς εξάρτησης των λύσεων του ΠΑΤ

$$u' = \sin(\lambda u) + (2\lambda - 1)u, \qquad u(0) = u_0, \qquad t \in [a, b]$$

ως προς την παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ *και την αρχική συνθήκη* u_0.*]*

(ii) *Γράψτε ένα ΠΑΤ που ικανοποιεί η* $y(t)$.

Θέμα 3 (2 μονάδες) (i) *Υπολογίστε τον εκθετικό πίνακα* e^{At}, *όπου*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) *Να βρεθεί η γενική λύση του ανομοιογενούς συστήματος*

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(t), \qquad \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη φόρμουλα $\vec{y}(t) = e^{At}\vec{y}(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}\vec{b}(s)ds$.*]*

Θέμα 4 (2 μονάδες) *Η ροή* $\vec{\varphi}(t, \vec{\xi})$ *ενός διανυσματικού πεδίου* $\vec{v}(\vec{y})$ *λύνει το ΠΑΤ*

$$\vec{y}' = \vec{v}(\vec{y}), \qquad \vec{y}(0) = \vec{\xi}$$

και η ολοκληρωτική καμπύλη που διέρχεται από το $\vec{\xi}$ *τη χρονική στιγμή 0 δίνεται από την* $\vec{\varphi}(\cdot, \vec{\xi})$.

(i) *Να υπολογίσετε τη ροή του* $\vec{v}(\vec{y}) = (-2y_2, 8y_1)$, *όπου* $\vec{y} = (y_1, y_2)$.

(ii) *Να δειχθεί ότι για* $\vec{\xi} = (1, 0)$ *η αντίστοιχη ολοκληρωτική καμπύλη είναι έλλειψη.*

Θέμα 5 (2 μονάδες) *Έστω η* C^1 *συνάρτηση*

$$y' = f(y) = \begin{cases} 0, & y = 0 \\ -y^3 \sin\frac{1}{y}, & y \neq 0 \end{cases}$$

(i) *Να βρεθούν τα μη μηδενικά σημεία ισορροπίας και να μελετηθεί η ευστάθεια τους.*

(ii) *Δείξτε ότι το σημείο ισορροπίας* $\overline{y} = 0$ *είναι ευσταθές. Εξηγήστε γιατί δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.*

Θέμα 6 (2 μονάδες) *Έστω το σύστημα*

$$\begin{cases} y_1' = y_2 - y_1(1 - y_1^2 - y_2^2) \\ y_2' = -y_1 - y_2(1 - y_1^2 - y_2^2) \end{cases}$$

(i) *Να δειχθεί ότι το* $\overline{y} = (0, 0)$ *είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας.*

(ii) *Να δειχθεί ότι το* $\overline{y} = (0, 0)$ *είναι Lyapunov ασυμπτωτικά ευσταθές.*

Λύσεις

1 (i) Μία λύση είναι η μηδενική $y(t) = 0$. Για $t > 0$ διαιρούμε με το δεξί μέλος και ολοκληρώνουμε στο διάστημα $[0, t]$:

$$(\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}})' = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = t \quad \Rightarrow \quad y = (\frac{2}{3})^{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}$$

Παρατηρούμε ότι η C^1 συνάρτηση

$$y = \begin{cases} (\frac{2}{3})^{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

είναι επίσης λύση. Η μοναδικότητα των λύσεων του θεωρήματος Picard δεν ισχύει διότι η συνάρτηση $f(y) = y^{\frac{1}{3}}$ δεν είναι Lipschitz κοντά στο 0. Πράγματι, δεν υπάρχει σταθερά τέτοια ώστε $|y^{\frac{1}{3}} - 0| \leq C|y - 0|$ για κάθε $y \in [0, \varepsilon]$, εφόσον $y^{-\frac{2}{3}} \to +\infty$ καθώς το $y \to 0$.

(ii) Η συνάρτηση $f(y) = |\sin y|$ είναι Lipschitz σε όλο το $\mathbb{R}$. Πράγματι, το ΘΜΤ δίνει $|\sin y_2 - \sin y_1| = |\cos y_*| \cdot |y_2 - y_1| \leq |y_2 - y_1|$, για κάποιο y_* μεταξύ των y_1, y_2. Άρα το θεώρημα του Picard εγγυάται την ύπαρξη μοναδικής λύσης του ΠΑΤ.

2 (i) Έστω $y(t)$ η λύση του ΠΑΤ με παραμέτρους $\lambda = 0$ και $u_0 = 2$. Από το θεώρημα συνεχούς εξάρτησης έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο για κάθε

$$|\lambda - 0| + |u_0 - 2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |u(t) - y(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [a, b].$$

Θέτοντας $\lambda = \frac{1}{n}$, $u_0 = 2 - \frac{1}{n}$, παρατηρούμε ότι οι λύσεις των αντίστοιχων ΠΑΤ είναι οι $y_n(t)$. Επίσης διαλέγοντας n_0 τέτοιο ώστε $\frac{2}{n_0} < \delta$ έχουμε από την παραπάνω συνεπαγωγή:

$$|y_n(t) - y(t)| < \varepsilon, \qquad \forall n \geq n_0, \ t \in [a, b].$$

Εφόσον το $\varepsilon > 0$ είναι τυχαίο, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $y_n(t)$ συγκλίνει στην $y(t)$ για κάθε $t \in [a, b]$. Από την άλλη,

(ii) Η συνάρτηση όριο $y(t)$ ικανοποιεί το ΠΑΤ

$$y' = -y, \qquad y(0) = 2, \qquad t \in [a, b].$$

Άρα $y(t) = 2e^{-t}$.

3 (i) Θέλουμε να κάνουμε χρήση του τύπου

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

Παρατηρούμε ότι οι δυνάμεις του πίνακα ισούνται

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα έχουμε

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{kt^k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & t\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

(ii) Χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα για τη λύση του ανομοιογενούς συστήματος παίρνουμε

$$y(t) = \begin{bmatrix} te^t \\ e^t \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{t-s} & (t-s)e^{t-s} \\ 0 & e^{t-s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^s \\ 0 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} te^t \\ e^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t e^t ds \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2te^t \\ e^t \end{bmatrix}$$

4 (i) Το ΠΑΤ της ροής γράφεται

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του παραπάνω πίνακα λύνουν $\lambda^2 + 16 = 0$, δηλ. $\lambda_{1,2} = \pm 4i$. Τα αντίστοιχα βασικά ιδιοδιανύσματα είναι

$$\mathrm{Re}(e^{4i}\vec{u}), \qquad \mathrm{Im}(e^{4i}\vec{u}),$$

όπου

$$\begin{bmatrix} -4i & -2 \\ 8 & -4i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_2 = -2iu_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε

$$e^{4i}\vec{u} = (\cos 4t + i \sin 4t) \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos 4t \\ 2\sin 4t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin 4t \\ -2\cos 4t \end{bmatrix}$$

Η γενική λύση ισούται

$$\vec{y} = c_1 \begin{bmatrix} \cos 4t \\ 2\sin 4t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin 4t \\ -2\cos 4t \end{bmatrix}.$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι σταθερές c_1, c_2 καθορίζονται από τα ξ_1, ξ_2, ώστε να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη:

$$\vec{y}(0) = \vec{\xi} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = \xi_1 \\ -2c_2 = \xi_2 \end{cases}$$

Άρα έχουμε τον τύπο $\vec{\varphi}(t, \vec{\xi}) = \left(\xi_1 \cos 4t - \frac{1}{2}\xi_2 \sin 4t, 2\xi_1 \sin 4t + \xi_2 \cos 4t\right)$.

(ii) Για $\xi_1 = 1, \xi_2 = 0$, η ολοκληρωτική καμπύλη είναι η αντίστοιχη τροχιά $\vec{y}(t)$, η οποία με βάση το (i) δίνεται σε παραμετρική μορφή από $\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t)) = (\cos 4t, 2\sin 4t)$. Άρα έχουμε $y_1^2 + \frac{y_2^2}{4} = 1$, δηλ. έλλειψη.

5 (i) Τα μη μηδενικά σημεία ισορροπίας ικανοποιούν

$$\sin \frac{1}{y} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{y} = \frac{1}{k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}^*.$$

Η γραμμικοποίηση της εξίσωσης σε αυτά τα σημεία ισορροπίας ισούται

$$y' = f'(\bar{y})y, \qquad f'(\bar{y}) = \begin{cases} \frac{1}{k\pi} & k \text{ άρτιος} \\ -\frac{1}{k\pi} & k \text{ περιττός} \end{cases}$$

Άρα τα $\bar{y} = \frac{1}{k\pi}$ για $k > 0$ άρτιο ή $k < 0$ περιττό είναι ασταθή, εφόσον $f'(\bar{y}) > 0$, ενώ τα $\bar{y} = \frac{1}{k\pi}$ για $k < 0$ άρτιο ή $k > 0$ περιττό είναι ασυμπτωτικά ευσταθή, εφόσον $f'(\bar{y}) < 0$.

(ii) Έστω $\varepsilon > 0$ και $|y_0| < \frac{1}{m\pi}$, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι η αντίστοιχη λύση $y(t)$ του ΠΑΤ $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$, ικανοποιεί $|y(t)| < \frac{1}{m\pi}$, για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Πράγματι, τα $-\frac{1}{m\pi}, \frac{1}{m\pi}$ είναι σημεία ισορροπίας. Αν υπάρχει $|y(t)| \geq \frac{1}{m\pi}$ για κάποιο $t \in (0, +\infty)$, τότε υπάρχει $t_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $|y(t_0)| = \frac{1}{m\pi}$, π.χ. $y(t_0) = \frac{1}{m\pi}$. Από μοναδικότητα των λύσεων έχουμε $y(t) = \frac{1}{m\pi}$ για κάθε $t \in [0, +\infty)$, άτοπο. Άρα διαλέγοντας m αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{1}{m\pi} < \varepsilon$, συμπεραίνουμε ότι $|y(t)| < \varepsilon$ για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Άρα το $\bar{y} = 0$ είναι ευσταθές. Παρ' όλ' αυτά παρατηρούμε ότι δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, αφού για να ισχύει $y(t) \to 0$, καθώς το $t \to +\infty$, θα πρέπει η τροχιά της λύσης $y(t)$ να 'περάσει' (θεώρημα ενδιάμεσης τιμής) από άπειρα σημεία ισορροπίας $\frac{1}{k\pi}$ μεταξύ των $0, y_0$, που δε γίνεται πάλι λόγω μοναδικότητας των λύσεων.

6 (i) Τα σημεία ισορροπίας ικανοποιούν εξορισμού

$$\begin{cases} 0 = \overline{y}_2 - \overline{y}_1(1 - \overline{y}_1^2 - \overline{y}_2^2) \\ 0 = -\overline{y}_1 - \overline{y}_2(1 - \overline{y}_1^2 - \overline{y}_2^2) \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με $\overline{y}_1$, τη δεύτερη με $\overline{y}_2$ και αθροίζοντάς τες παίρνουμε

$$0 = \overline{y}_1[\overline{y}_2 - \overline{y}_1(1 - \overline{y}_1^2 - \overline{y}_2^2)] - \overline{y}_2[\overline{y}_1 + \overline{y}_2(1 - \overline{y}_1^2 - \overline{y}_2^2)] = -(\overline{y}_1^2 + \overline{y}_2^2)(1 - \overline{y}_1^2 - \overline{y}_2^2)$$

Επομένως έχουμε τις περιπτώσεις

$$\overline{y}_1^2 + \overline{y}_2^2 = 0 \quad \acute{\eta} \quad \overline{y}_1^2 + \overline{y}_2^2 = 1.$$

Η πρώτη περίπτωση δίνει $\overline{y} = (0, 0)$, ενώ η δεύτερη απορρίπτεται, αφού επιστρέφοντας στο αρχικό σύστημα έχουμε

$$\begin{cases} 0 = \overline{y}_2 \\ 0 = -\overline{y}_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \overline{y}_1^2 + \overline{y}_2^2 = 0 \neq 1$$

άτοπο. Άρα το $\overline{y} = (0, 0)$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας.

(ii) Θεωρούμε τη θετικά ορισμένη συνάρτηση $V = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)$ κοντά στο 0. Η παράγωγός της ως προς το χρόνο ισούται

$$V' = \overline{y}_1[\overline{y}_2 - \overline{y}_1(1 - \overline{y}_1^2 - \overline{y}_2^2)] - \overline{y}_2[\overline{y}_1 + \overline{y}_2(1 - \overline{y}_1^2 - \overline{y}_2^2)] = -(\overline{y}_1^2 + \overline{y}_2^2)(1 - \overline{y}_1^2 - \overline{y}_2^2) \leq 0$$

για (y_1, y_2) κοντά στο 0. Μάλιστα, η παράγωγος μηδενίζεται μόνο για $(y_1, y_2) = (0, 0)$, δηλ. η V είναι αυστηρή συνάρτηση Lyapunov. Άρα το $(0, 0)$ είναι Lyapunov ασυμπτωτικά ευσταθές.