Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (MEM-272)

Επαναληπτική εξέταση 5/9/2023. Διδάσκων: Γρηγόρης Φουρνόδαυλος

Συνολικές μονάδες: 10. Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες.

Θέμα 1 (2 μονάδες) *Έστω το ΠΑΤ*

$$y' = y + t, \qquad y(0) = 0.$$

(i) *Γράψτε το ΠΑΤ σε ολοκληρωτική μορφή, ορίστε τις διαδοχικές προσεγγίσεις Picard,* $y_n(t)$, $n \geq 0$, $y_0(t) = 0$, *και υπολογίστε τις* $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$.

(ii) *Βρείτε που συγκλίνει η ακολουθία* $y_n(t)$ *καθώς το* $n \to +\infty$, *για κάθε* t *κοντά στο 0.*

Θέμα 2 (2 μονάδες) *Δείξτε ότι η μοναδική λύση του ΠΑΤ*

$$y' = ye^{\sin y} + t^2, \qquad y(0) = 0$$

ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

Θέμα 3 (2 μονάδες) (i) *Να βρεθεί η γενική λύση του γραμμικού συστήματος*

$$\vec{y}' = A\vec{y}, \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

(ii) *Γράψτε ένα θεμελιώδη πίνακα λύσεων και υπολογίστε τον εκθετικό πίνακα* e^{At}.

Θέμα 4 (2 μονάδες) *Έστω η οικογένεια διαφορικών εξισώσεων*

$$y' = \mu(y-1)(y-2), \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

(i) *Να βρείτε τις τιμές διακλάδωσης (αν υπάρχουν), τα σημεία ισορροπίας, και να μελετηθεί η ευστάθεια των τελευταίων σχεδιάζοντας τα αντίστοιχα διαγράμματα φάσης σε κάθε περίπτωση.*

(ii) *Έστω* $y(t)$ *η λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη* $y(0) = \frac{3}{2}$. *Αποφανθείτε αν η* $y(t)$ *συγκλίνει και που, καθώς το* $t \to +\infty$.

Θέμα 5 (2 μονάδες) *Έστω το σύστημα*

$$\begin{cases} y_1' = (1 - y_2)y_1 \\ y_2' = (y_1 - 1)y_2 \end{cases}$$

(i) *Δείξτε ότι μια τροχιά* $(y_1(t), y_2(t))$ *με αρχική συνθήκη* $y_1(0), y_2(0) > 0$ *παραμενει αυστηρά στο πρώτο τεταρτημόριο, δηλ.* $y_1(t), y_2(t) > 0$ *για κάθε* $t \in \mathbb{R}$.

(ii) *Μελετήστε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας* $(\overline{y}_1, \overline{y}_2) = (1, 1)$ *μέσω της αρχής της γραμμικοποίησης.*

Λύσεις

1 (i) Το ΠΑΤ έχει την ολοκληρωτική μορφή

$$y(t) = \int_0^t y(s)ds + \frac{t^2}{2}$$

Οι διαδοχικές προσεγγίσεις Picard ορίζονται ως εξής:

$$y_n(t) = \int_0^t y_{n-1}(s)ds + \frac{t^2}{2}, \qquad n \geq 1, \qquad y_0(t) = 0.$$

Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{t^2}{2} \\ y_2(t) &= \int_0^t y_1(s)ds + \frac{t^2}{2} = \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} \\ y_3(t) &= \int_0^t y_2(s)ds + \frac{t^2}{2} = \frac{t^4}{24} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

(ii) Το όριο των διαδοχικών προσεγγίσεων $y_n(t)$ συμπίπτει με την μοναδική λύση του ΠΑΤ. Αυτή υπολογίζεται με 2 τρόπους:

Παρατηρώντας ότι ο τύπος του $y_n(t)$ δίνεται από το άθροισμα

$$y_n(t) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k}{k!} - t - 1$$

το οποίο συγκλίνει στη συνάρτηση $y_n(t) \to y(t) = e^t - t - 1$, καθώς το $n \to +\infty$, η οποία εύκολα διαπιστώνουμε ότι ικανοποιεί το ΠΑΤ.

Διαφορετικά, υπολογίζουμε τη λύση του ΠΑΤ μέσω ολοκληρωτικού παράγοντα:

$$\begin{aligned} & y' = y + t \\ \Rightarrow \quad & (ye^{-t})' = te^{-t} \\ \Rightarrow \quad & ye^{-t} = \int_0^t se^{-s}ds = -\int_0^t s(e^{-s})'ds = -[se^{-s}]_0^t + \int_0^t e^{-s}ds \\ & \qquad = -te^{-t} - [e^{-s}]_0^t = -te^{-t} - e^{-t} + 1 \\ \Rightarrow \quad & y = e^t - t - 1 \end{aligned}$$

2 Έστω (a, b) το μέγιστο πεδίο ορισμού της λύσης $y(t)$ του ΠΑΤ, όπου $0 \in (a, b)$. Αν $b < +\infty$, τότε ξέρουμε ότι $|y(t)| \to +\infty$, καθώς το $t \to b$. Γράφοντας την ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης

$$y(t) = \int_0^t ye^{\sin y}ds + \frac{t^3}{3},$$

παίρνουμε απόλυτες τιμές και εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα:

$$|y(t)| \leq \int_0^t |y(s)|e^{\sin y}ds + \frac{t^3}{3} \leq e\int_0^t |y(s)|ds + \frac{b^3}{3}$$

για κάθε $t \in [0, b)$, εφόσον $\sin y \leq 1$. Από την ανισότητα Gronwall συμπεραίνουμε ότι

$$|y(t)| \leq e^{eb}\frac{b^3}{3}$$

για κάθε $t \in [0, b)$. Άρα το όριο της $|y(t)|$ δεν μπορεί να απειρίζεται καθώς το $t \to b$, άτοπο. Άρα έχουμε $b = +\infty$. Παρόμοια δείχνουμε ότι $a = -\infty$, δηλ. ότι η λύση $y(t)$ του ΠΑΤ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

3 (i) Πρώτα υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda+1)-6 = \lambda^2-3\lambda-10 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -2, 5$$

Για τα ιδιοδιανύσματα βρίσκουμε:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_2 = -3u_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2v_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως η γενική λύση του συστήματος ισούται

$$\vec{y} = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(ii) Με βάση την παραπάνω γενική λύση, ένας θεμελιώδης πίνακας είναι ο ακόλουθος

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix}$$

Ο εκθετικός πίνακας ισούται με

$$e^{At} = \Phi(t)[\Phi(0)]^{-1}$$

όπου έχουμε

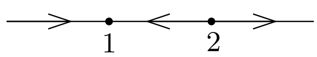
$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [\Phi(0)]^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα

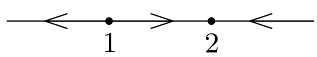
$$e^{At} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} e^{-2t}+6e^{5t} & -2e^{-2t}+2e^{5t} \\ -3e^{-2t}+3e^{5t} & 6e^{-2t}+e^{5t} \end{bmatrix}$$

4 (i) Για $\mu \neq 0$, τα σημεία ισορροπίας είναι $\overline{y} = 1, 2$. Για $\mu = 0$, κάθε $\overline{y} \in \mathbb{R}$ είναι σ.ι. και τετριμμένα ασυμπτωτικά ευσταθές, εφόσον $y(t) = y(0)$ για κάθε t. Επίσης παρατηρούμε ότι ο χαρακτήρας των σ.ι. $\overline{y} = 1, 2$ αντιστρέφεται όταν το μ αλλάζει πρόσημο. Πράγματι, για $\mu > 0$, το $\overline{y} = 1$ είναι το ασυμπτωτικά ευσταθές σ.ι., ενώ το $\overline{y} = 2$ είναι ασταθές. Για $\mu < 0$, το $\overline{y} = 1$ είναι ασταθές, ενώ το $\overline{y} = 2$ ασυμπτωτικά ευσταθές. Επομένως το $\overline{\mu} = 0$ είναι τιμή διακλάδωσης. Τα διάγραμματα φάσης για $\mu \neq 0$ έχουν ως εξής:

$\mu > 0$



$\mu < 0$



(ii) Για $\mu = 0$, $y(t) = \frac{3}{2}$ για κάθε t, οπότε $y(t) \to \frac{3}{2}$ τετριμμένα. Για $\mu \neq 0$, η θεωρία μας λέει ότι η τιμή $y(t)$ μεταβάλλεται ανάλογα με την κατεύθυνση που υποδεικνύει το διάγραμμα φάσης στο διάστημα που βρίσκεται η αρχική τιμή, δηλ. $\frac{3}{2} \in (1, 2)$. Άρα για $\mu > 0$ έχουμε $y(t) \to 1$, ενώ για $\mu < 0$, $y(t) \to 2$, καθώς το $t \to +\infty$.

5 (i) Αν για κάποιο $t_0 \in \mathbb{R}$ έχουμε $y_1(t_0) \le 0$ ή $y_2(t_0) \le 0$, τότε υπάρχει t_* τέτοιο ώστε $y_1(t_*) = 0$ ή $y_2(t_*) = 0$. Ας υποθέσουμε ότι $y_1(t_*) = 0$. Παρατηρούμε ότι η μοναδική λύση του συστήματος με αρχική συνθήκη $y_1(t_*), y_2(t_*)$ δίνεται από τις

$$y_1(t) = 0, \qquad y_2'(t) = -y_2(t) \quad \Rightarrow \quad y_2(t) = y_2(t_*)e^{-t}$$

Από την μοναδικότητα των τροχιών/λύσεων, συμπεραίνουμε ότι η αρχική τροχιά παραμένει για πάντα πάνω στον ημιάξονα $0y_2$, άτοπο εφόσον $y_1(0) > 0$ από υπόθεση. Αν $y_2(t_*) = 0$, το επιχείρημα είναι παρόμοιο. Άρα συμπεραίνουμε ότι $y_1(t), y_2(t) > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Το γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από το σημείο ισορροπίας $(1, 1)$ γράφεται σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα του γραμμικού συστήματος είναι $\lambda_{1,2} = \pm i$. Εφόσον το $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$, δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την ευστάθεια του σ.ι. του μη γραμμικού συστήματος μέσω της αρχής της γραμμικοποίησης.