

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (MEM-272)

Τελική εξέταση 11/1/2023. Διδάσκων: Γρηγόρης Φουρνόδαυλος

Συνολικές μονάδες: 13. Μέγιστος τελικός βαθμός: 10. Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες.

Θέμα 1 (2 μονάδες) Σωστό ή Λάθος; Αιτιολογείτε την απάντησή σας:

- (i) Το ΠΑΤ $y' = |y|$, $y(0) = y_0$, έχει μοναδική λύση ορισμένη σε μια γειτονιά του μηδενός.
- (ii) Η μοναδική λύση του ΠΑΤ $y' = y^{\frac{1}{2}}$, $y(0) = 0$, είναι η μηδενική.
- (iii) Έστω $f(y)$ τοπικά Lipschitz στο $\mathbb{R}$. Τότε το ΠΑΤ $y' = f(y)$, $y(0) = 1$ έχει καθολική λύση.
- (iv) Έστω $f(y)$ τοπικά Lipschitz στο $\mathbb{R}$ και y λύση του ΠΑΤ $y' = f(y)$, $y(t_0) = y_0$, με μέγιστο πεδίο ορισμού το (a, b) , η οποία είναι φραγμένη. Τότε $(a, b) = \mathbb{R}$.

Θέμα 2 (2 μονάδες) Έστω $f(y)$ Lipschitz σε όλο το $\mathbb{R}$, δηλ. $|f(y_2) - f(y_1)| \leq C|y_2 - y_1|$ για κάθε $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, και έστω $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $T > 0$, λύση του ΠΑΤ $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$. Δείξτε ότι:

- (i) Το $\sup_{t \in [0, T]} |y(t)|$ είναι πεπερασμένο. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιείτε την ανισότητα Gronwall.]
- (ii) Η λύση $y(t)$ επεκτείνεται σε όλο το $[0, +\infty)$.

Θέμα 3 (2 μονάδες) (i) Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\vec{y}' = A\vec{y}, \quad A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (ii) Επιλέξτε τρεις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις και δείξτε ότι η ορίζουσα Wronski τους είναι σταθερή.

Θέμα 4 (2 μονάδες) Η ροή $\vec{\varphi}(t, \vec{\xi})$ ενός διανυσματικού πεδίου $\vec{v}(\vec{y})$ λύνει το ΠΑΤ

$$\vec{y}' = \vec{v}(\vec{y}), \quad \vec{y}(0) = \vec{\xi}$$

και η ολοκληρωτική καμπύλη που διέρχεται από το $\vec{\xi}$ τη χρονική στιγμή 0 δίνεται από την $\vec{\varphi}(\cdot, \vec{\xi})$.

- (i) Να υπολογίσετε τη ροή του $\vec{v}(\vec{y}) = (2y_2, 8y_1)$, όπου $\vec{y} = (y_1, y_2)$.
- (ii) Να δείχθεί ότι για $\vec{\xi} = (1, 0)$ η αντίστοιχη ολοκληρωτική καμπύλη είναι υπερβολή.

Θέμα 5 (2,5 μονάδες) Να βρεθούν οι τιμές διακλάδωσης της οικογένειας εξισώσεων

$$y' = (y - \mu)(y^2 - 4y + 3), \quad \mu \in \mathbb{R},$$

τα σημεία ισορροπίας, η ευστάθεια/αστάθεια των τελευταίων, και να σχεδιαστούν τα διαγράμματα φάσης για τις διαφορετικές τιμές του μ .

Θέμα 6 (2,5 μονάδες) (i) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος

$$\begin{cases} y_1' = y_1^3 - y_1 + \frac{1}{2}y_2^2 \\ y_2' = y_2(y_1^2 - \frac{1}{2}y_1) \end{cases}$$

και να μελετηθεί η ευστάθεια τους μέσω της γραμμικοποίησης. (1,5 μονάδες)

- (ii) Να δείχθεί ότι το $(0, 0)$ είναι Lyapunov ευσταθές σημείο ισορροπίας. (1 μονάδα)

Υποδείξεις

1 (i) Σωστό. Ισχύει η τριγωνική ανισότητα $||y_2| - |y_1|| \leq |y_2 - y_1|$, άρα η συνάρτηση $f(y) = |y|$ είναι Lipschitz. Το θεώρημα του Picard εγγυάται λοιπόν την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης του ΠΑΤ ορισμένη σε μια γειτονιά του $t = 0$.

(ii) Λάθος. Η συνάρτηση

$$y = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

είναι C^1 και λύνει επίσης το ΠΑΤ, άρα η μηδενική λύση δεν είναι η μοναδική.

(iii) Λάθος. Η $f(y) = y^2$ είναι τοπικά Lipschitz στο $\mathbb{R}$, όμως η αντίστοιχη λύση του ΠΑΤ ισούται με $y = 1/(1-t)$ και έχει μέγιστο πεδίο ορισμού το $(-\infty, 1)$, διότι η λύση απειρίζεται καθώς το $t \rightarrow 1$ από τα αριστερά. Άρα δεν είναι καθολική.

(iv) Σωστό. Αν $|a| < +\infty$ ή $|b| < +\infty$, τότε $\lim_{t \rightarrow a^+} |y| = +\infty$ ή $\lim_{t \rightarrow b^-} |y| = +\infty$. Αυτό αποκλείεται εφόσον η λύση ξέρουμε ότι είναι φραγμένη στο (a, b) . Άρα $a = -\infty$, $b = +\infty$, δηλ. $(a, b) = \mathbb{R}$.

2 (i) Η $f(y)$ ικανοποιεί $|f(y)| \leq |f(0)| + C|y|$. Από την ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης έχουμε:

$$y = y_0 + \int_0^t f(y) ds \Rightarrow |y| \leq |y_0| + |f(0)|T + C \int_0^t |y| ds,$$

για κάθε $t \in [0, T)$. Από την ανισότητα Gronwall για την $|y|$ παίρνουμε

$$|y| \leq [|y_0| + |f(0)|T] e^{Ct}, \quad \forall t \in [0, T) \Rightarrow \sup_{t \in [0, T)} |y| \leq [|y_0| + |f(0)|T] e^{CT} < +\infty$$

όπως θέλαμε να δείξουμε.

(ii) Έστω (a, b) το μέγιστο πεδίο ορισμού της λύσης. Προφανώς $[0, T) \subset (a, b)$. Θεωρούμε το διάστημα $[0, b)$. Αν $b < +\infty$, τότε από τη θεωρία ξέρουμε ότι $\lim_{t \rightarrow b^-} |y| = +\infty$. Από την άλλη μεριά, επαναλαμβάνοντας το (i) για $T = b$, έχουμε $\sup_{t \in [0, b)} |y| \leq [|y_0| + |f(0)|b] e^{Cb} < +\infty$. Άτοπο, άρα $b = +\infty$, δηλ. η λύση επεκτείνεται σε όλο το $[0, +\infty)$.

3 (i) Πρώτα υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του A :

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(4+\lambda)[(2-\lambda)^2 + 1] = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4, \quad \lambda_{2,3} = 2 \pm i$$

Έπειτα υπολογίζουμε τα βασικά ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -4$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow u_2 = u_3 = 0 \Rightarrow \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και για την μιγαδική ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2 + i$:

$$\begin{bmatrix} -6-i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = 0, v_3 = iv_2, \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Από την μεθοδολογία ξέρουμε ότι τρεις βασικές λύσεις είναι οι

$$\vec{\varphi}_1 = e^{-4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\varphi}_2 = \operatorname{Re}(e^{(2+i)t} \vec{v}), \quad \vec{\varphi}_3 = \operatorname{Im}(e^{(2+i)t} \vec{v}),$$

όπου

$$e^{(2+i)t}\vec{v} = e^{2t}(\cos t + i \sin t) \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = e^{2t} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}}_{\vec{\varphi}_2} + i e^{2t} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}}_{\vec{\varphi}_3}$$

Η γενική λύση δίνεται από $\vec{y} = c_1 \vec{\varphi}_1 + c_2 \vec{\varphi}_2 + c_3 \vec{\varphi}_3$.

(ii) Οι βασικές λύσεις $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \vec{\varphi}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Για αυτές οι ορίζουσα Wronski ισούται με

$$W(t) = |\vec{\varphi}_1 \quad \vec{\varphi}_2 \quad \vec{\varphi}_3| = \begin{vmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2t} \sin t & e^{2t} \cos t \\ 0 & e^{2t} \cos t & e^{2t} \sin t \end{vmatrix} = e^{-4t}(-e^{4t} \sin^2 t - e^{4t} \cos^2 t) = -1,$$

η οποία είναι όντως σταθερή (ανεξάρτητη από το t).

Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι για οποιοδήποτε γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, η αντίστοιχη ορίζουσα Wronski ισούται με $W(t) = W(t_0)e^{\text{tr}A(t-t_0)} = W(t_0)$ (πρόταση που έχουμε δείξει στο μάθημα), αφού το ίχνος του πίνακα $\text{tr}A = 0$. Άρα η ορίζουσα Wronski είναι πάντα σταθερή.

4 (i) Το ΠΑΤ της ροής γράφεται

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του παραπάνω πίνακα λύνουν $\lambda^2 - 16 = 0$, δηλ. $\lambda_{1,2} = \pm 4$. Τα αντίστοιχα βασικά ιδιοδιανύσματα είναι

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0 & \Rightarrow u_2 = 2u_1 \Rightarrow \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 & \Rightarrow v_2 = -2v_1 \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Η γενική λύση ισούται $\vec{y} = c_1 e^{4t} \vec{u} + c_2 e^{-4t} \vec{v}$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι σταθερές c_1, c_2 καθορίζονται από τα ξ_1, ξ_2 , ώστε να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη:

$$\vec{y}(0) = \vec{\xi} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = \xi_1 \\ 2c_1 - 2c_2 = \xi_2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{2\xi_1 + \xi_2}{4}, \quad c_2 = \frac{2\xi_1 - \xi_2}{4}$$

Άρα έχουμε τον τύπο $\varphi(t, \vec{\xi}) = \left(\frac{2\xi_1 + \xi_2}{4} e^{4t} + \frac{2\xi_1 - \xi_2}{4} e^{-4t}, \frac{2\xi_1 + \xi_2}{2} e^{4t} - \frac{2\xi_1 - \xi_2}{2} e^{-4t} \right)$.

(ii) Για $\xi_1 = 1, \xi_2 = 0$, η ολοκληρωτική καμπύλη είναι η αντίστοιχη τροχιά $\vec{y}(t)$, η οποία με βάση το (i) δίνεται σε παραμετρική μορφή από $\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t)) = (\frac{1}{2}e^{4t} + \frac{1}{2}e^{-4t}, e^{4t} - e^{-4t})$. Άρα έχουμε $y_1^2 - \frac{y_2^2}{4} = 1$, δηλ. υπερβολή.

5 Τα σημεία ισορροπίας $\bar{y}$ μηδενίζουν το δεξί μέλος της εξίσωσης, άρα $\bar{y} = \mu, 1, 3$. Για $\mu \neq 1, 3$, έχουμε 3 σημεία ισορροπίας, ενώ για $\mu = 1$ ή 3 έχουμε 2 σημεία ισορροπίας. Άρα υπάρχουν 2 τιμές διακλάδωσης $\bar{\mu} = 1, 3$.

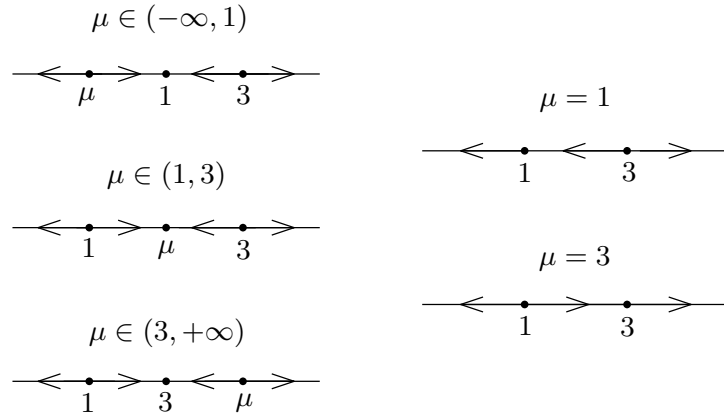
Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα φάσης για τις περιπτώσεις $\mu \in (-\infty, 1)$, $\mu = 1$, $\mu \in (1, 3)$, $\mu = 3$, $\mu \in (3, +\infty)$ (βλέπε παρακάτω). Τα βέλη κάθε διαγράμματος καθορίζονται από το πρόσημο του δεξιού μέλους της εξίσωσης στο αντίστοιχο διάστημα για την κάθε περίπτωση. Η ευστάθεια ή αστάθεια του κάθε σ.ι. εξαρτάται από το αν τα βέλη δείχνουν προς το σ.ι. ή αν τουλάχιστον ένα βέλος δείχνει μακριά από το σ.ι. αντίστοιχα.

Για $\mu \in (-\infty, 1)$: Τα $\mu, 3$ είναι ασταθή, ενώ το 1 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Για $\mu \in (1, 3)$: Τα $1, 3$ είναι ασταθή, ενώ το μ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Για $\mu \in (3, +\infty)$: Τα $1, \mu$ είναι ασταθή, ενώ το 3 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Για $\mu = 1, 3$: Τα $1, 3$ είναι ασταθή.



6 (i) Τα σημεία ισορροπίας $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ ικανοποιούν:

$$\begin{cases} \bar{y}_1^3 - \bar{y}_1 + \frac{1}{2}\bar{y}_2^2 = 0 \\ \bar{y}_2(\bar{y}_1^2 - \frac{1}{2}\bar{y}_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{y}_1^3 - \bar{y}_1 = 0 \\ \bar{y}_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \bar{y}_1^3 - \bar{y}_1 + \frac{1}{2}\bar{y}_2^2 = 0 \\ \bar{y}_1^2 - \frac{1}{2}\bar{y}_1 = 0 \end{cases}$$

Άρα έχουμε $\bar{y} = (0, 0), (1, 0), (-1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Η γραμμικοποίηση του αρχικού συστήματος γύρω από ένα σημείο ισορροπίας είναι το σύστημα

$$\vec{y}' = Df(\bar{y})\vec{y}, \text{ όπου } f(y_1, y_2) = (y_1^3 - y_1 + \frac{1}{2}y_2^2, y_2(y_1^2 - \frac{1}{2}y_1))$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} Df(0, 0) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & Df(1, 0) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, & Df(-1, 0) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \\ Df(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \end{bmatrix}, \\ Df(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι τα σ.ι. $(1, 0), (-1, 0)$ είναι ασταθή λόγω θετικών ιδιοτιμών των αντίστοιχων πινάκων. Τα σ.ι. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ είναι ασταθή, διότι οι ορίζουσες των αντίστοιχων πινάκων είναι αρνητικές, που σημαίνει ότι ο κάθε πίνακας έχει μία αρνητική και μία θετική ιδιοτιμή (λόγος αστάθειας). Για τον τύπο του $(0, 0)$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε μέσω της γραμμικοποίησης διότι η μία ιδιοτιμή είναι αρνητική (υπέρ της ευστάθειας), αλλά η άλλη μηδενική.

(ii) Θεωρούμε τη θετικά ορισμένη συνάρτηση $V = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)$ κοντά στο 0. Η παράγωγος της V ως προς το χρόνο ισούται:

$$V' = y_1^4 - y_1^2 + \frac{1}{2}y_1y_2^2 + y_2^2y_1^2 - \frac{1}{2}y_1y_2^2 = y_1^4 - y_1^2 + y_2^2y_1^2 = y_1^2(y_1^2 + y_2^2 - 1) \leq 0$$

για (y_1, y_2) κοντά στο 0. Άρα το $(0, 0)$ είναι Lyapunov ευσταθές.