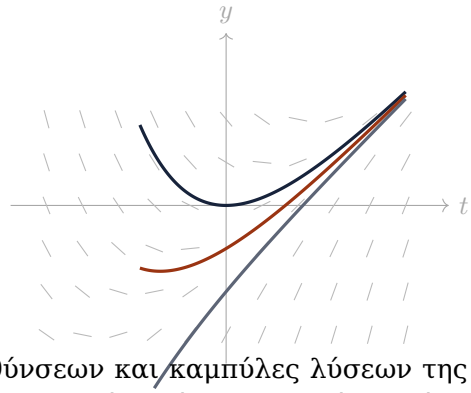
Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Σημειώσεις και Ασκήσεις

Αναθεωρημένη και εμπλουτισμένη έκδοση



Πεδίο διευθύνσεων και καμπύλες λύσεων της $y' = t - y$.
Κάθε μικρό ευθύγραμμο τμήμα δείχνει
την κλίση που ορίζει η εξίσωση.

Βασισμένο στις σημειώσεις και τις ασκήσεις του φθινοπώρου 2022

Οκτώβριος 2026

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές αναπτύσσουν, σε συνοπτική και αυτοτελή μορφή, το υλικό των χειρόγραφων διαλέξεων και των τεσσάρων φυλλαδίων ασκήσεων του μαθήματος του φθινοπώρου 2022. Διατηρούμε τη σειρά και τις βασικές επιλογές του αρχικού μαθήματος: αρχίζουμε από την ύπαρξη και τη μοναδικότητα, προχωρούμε προσεκτικά στη γραμμική θεωρία και αφιερώνουμε το δεύτερο μέρος στην ποιοτική μελέτη των λύσεων. Διατυπώνουμε ακριβέστερα τα θεωρήματα, συμπληρώνουμε τις συντομευμένες αποδείξεις και προσθέτουμε παραδείγματα εκεί όπου ένας υπολογισμός διευκολύνει την κατανόηση.

Διορθώνουμε επίσης ουσιαστικά μαθηματικά ζητήματα: δηλώνουμε ρητά τα μέγιστα διαστήματα ύπαρξης, διακρίνουμε την ευστάθεια από την ασυμπτωτική ευστάθεια, μελετούμε τις πολλαπλές ιδιοτιμές χωρίς να υποθέτουμε διαγωνιοποιησιμότητα και δεν συγχέουμε την αρνητική ημιοριστικότητα με την αρνητική οριστικότητα στη μέθοδο του Lyapunov. Σε μία άσκηση του 2022 ζητούνταν να αποδειχθεί ότι κάθε λύση της $y'' + (y')^5 + y + y^4 = 0$ τείνει στο μηδέν· αυτό είναι λανθασμένο, αφού η $y \equiv -1$ είναι λύση. Η διορθωμένη εκδοχή, με y^3 αντί για y^4, βρίσκεται στο Κεφάλαιο 7.

Κάθε κεφάλαιο κλείνει με ασκήσεις. Οι αρχικές ασκήσεις έχουν συμπεριληφθεί, με διευκρινίσεις στη σημειογραφία και διορθώσεις όπου χρειάστηκαν. Προσθέσαμε ενδιάμεσες ασκήσεις για να μειώσουμε τα μεγάλα άλματα δυσκολίας. Ο αστερίσκος σημαίνει ότι μια άσκηση είναι μεγαλύτερη ή απαιτεί πιο σύνθετη ιδέα. Το αρχικό υλικό διατίθεται στην ιστοσελίδα του μαθήματος του 2022.

Μια σημείωση για πρωτοετείς

Οι αποδείξεις απευθύνονται και σε αναγνώστες που γνωρίζουν λίγα πράγματα από την Ανάλυση ή τη Γραμμική Άλγεβρα. Γι' αυτό αναλύουμε βήματα που σε μεταγενέστερο μάθημα θα αφήναμε στον αναγνώστη. Όταν μια ποσότητα πρέπει να είναι «μικρή», δηλώνουμε ποια ακριβώς ανισότητα χρειαζόμαστε. Όταν χρησιμοποιούμε ιδιότητα πινάκων, την υπενθυμίζουμε πρώτα. Τρεις στοιχειώδεις ιδέες θα εμφανιστούν συχνά:

1. **Ολοκλήρωση της εξίσωσης.** Αν $y' = g$ και η g είναι συνεχής, το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού δίνει
$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds.$$
Έτσι μετατρέπουμε πολλές διαφορικές εξισώσεις σε ολοκληρωτικές.

2. **Εκτίμηση ολοκληρώματος.** Αν $|g(s)| \le M$ μεταξύ t_0 και t, τότε
$$\left| \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds \right| \le M\,|t - t_0|\,.$$

Η εκτίμηση αυτή μας επιτρέπει να επιλέξουμε χρόνο τόσο μικρό ώστε η λύση να μην απομακρυνθεί πολύ από την αρχική της τιμή.

3. **Έλεγχος σφάλματος.** Αν δύο υποψήφιες λύσεις y, z ικανοποιούν

$$|y(t) - z(t)| \leq L \int_{t_0}^{t} |y(s) - z(s)| \, ds,$$

τότε το σφάλμα αναγκαστικά είναι μηδέν. Η ανισότητα του Gronwall εκφράζει συστηματικά αυτή την ιδέα.

Οι ορισμοί, τα λήμματα και οι προτάσεις ξεχωρίζουν τα λογικά βήματα: τι υποθέτουμε, τι αποδεικνύουμε και ποιο προηγούμενο αποτέλεσμα χρησιμοποιούμε.

Περιεχόμενα

Πρόλογος **i**
Μια σημείωση για πρωτοετείς i

1 Προβλήματα αρχικών τιμών **1**
1.1 Λύσεις, ολοκληρωτικές εξισώσεις και μέγιστα διαστήματα 1
1.2 Το θεώρημα Picard--Lindelöf 2
1.3 Η ανισότητα του Gronwall και η συνεχής εξάρτηση 4
1.4 Συνέχιση λύσεων και ολική ύπαρξη 6
Ασκήσεις 8

2 Συστήματα και εξισώσεις ανώτερης τάξης **10**
2.1 Το διανυσματικό πρόβλημα αρχικών τιμών 10
2.2 Αναγωγή της τάξης 11
Ασκήσεις 12

3 Γραμμικές εξισώσεις ανώτερης τάξης **14**
3.1 Ομογενείς εξισώσεις και χώρος λύσεων 14
3.2 Σταθεροί συντελεστές 18
3.3 Μη ομογενείς εξισώσεις 20
Ασκήσεις 21

4 Γραμμικά συστήματα **23**
4.1 Υπενθύμιση Γραμμικής Άλγεβρας 23
4.2 Θεμελιώδεις πίνακες 23
4.3 Η εκθετική συνάρτηση πίνακα 26
4.4 Μιγαδικά και γενικευμένα ιδιοδιανύσματα 27
4.5 Μη ομογενή συστήματα με σταθερούς συντελεστές 28
Ασκήσεις 29

5 Αυτόνομες βαθμωτές εξισώσεις και διακλαδώσεις **31**
5.1 Γραμμές φάσης και σημεία ισορροπίας 31
5.2 Ευστάθεια 32
5.3 Ροή πάνω στην ευθεία 33
5.4 Μονοπαραμετρικές οικογένειες και διακλαδώσεις 34
Ασκήσεις 34

6 Αυτόνομα συστήματα και επίπεδο φάσης **36**
6.1 Ροές, τροχιές και αναλλοίωτα σύνολα 36
6.2 Ισορροπίες και ευστάθεια σε πολλές διαστάσεις 37
6.3 Γραμμικοποίηση μη γραμμικών συστημάτων 38
Ασκήσεις 40

7 Συναρτήσεις Lyapunov και μη γραμμική ευστάθεια **41**
7.1 Η άμεση μέθοδος 41
7.2 Η αρχή αναλλοιώτου του LaSalle 42
7.3 Ισοσταθμικές καμπύλες ενέργειας και συντηρητικά συστήματα . . . 43
7.4 Κατασκευή συναρτήσεων Lyapunov 44
Ασκήσεις 45

Σύντομος οδηγός ποιοτικής μελέτης **47**

Κεφάλαιο 1

Προβλήματα αρχικών τιμών

1.1 Λύσεις, ολοκληρωτικές εξισώσεις και μέγιστα διαστήματα

Ξεκινάμε με το βαθμωτό πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0, \tag{1.1}$$

όπου η f ορίζεται σε ανοιχτό σύνολο $D \subset \mathbb{R}^2$ που περιέχει το (t_0, y_0).

Ορισμός 1.1. *Λύση* της (1.1) σε διάστημα $I \ni t_0$ είναι μια συνάρτηση $y \in C^1(I)$ τέτοια ώστε $(t, y(t)) \in D$, $y'(t) = f(t, y(t))$ για κάθε $t \in I$, και $y(t_0) = y_0$. Είναι *μέγιστη* αν δεν επεκτείνεται σε λύση σε γνήσια μεγαλύτερο διάστημα.

Πρόταση 1.2 (Ολοκληρωτική μορφή)**.** *Αν η f είναι συνεχής, μια συνεχής $y : I \to \mathbb{R}$ λύνει την* (1.1) *αν και μόνο αν*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds, \qquad t \in I. \tag{1.2}$$

Απόδειξη. Αν η y είναι λύση, τότε $y'(s) = f(s, y(s))$ για κάθε $s \in I$. Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη από t_0 έως t, παίρνουμε

$$\int_{t_0}^{t} y'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds.$$

Από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού το αριστερό μέλος είναι $y(t) - y(t_0)$, και επειδή $y(t_0) = y_0$, προκύπτει η (1.2).

Αντιστρόφως, έστω συνεχής y που ικανοποιεί την ολοκληρωτική σχέση. Η σύνθεση $s \mapsto f(s, y(s))$ είναι συνεχής, αφού και η f και η y είναι συνεχείς. Επομένως η συνάρτηση

$$t \longmapsto \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f(t, y(t))$. Παραγωγίζοντας τη (1.2) βρίσκουμε $y' = f(t, y)$. Τέλος, για $t = t_0$, το ολοκλήρωμα είναι μηδέν και έτσι $y(t_0) = y_0$. □

Η ολοκληρωτική μορφή είναι το βασικό μας εργαλείο: μετατρέπει τη διαφορική εξίσωση σε πρόβλημα σταθερού σημείου και επιτρέπει άμεσες εκτιμήσεις.

1.2 Το θεώρημα Picard--Lindelöf

Ορισμός 1.3. Η $f : D \to \mathbb{R}$ είναι *τοπικά Lipschitz ως προς* y αν κάθε $(t_*, y_*) \in D$ έχει μια περιοχή στην οποία, για κάποιο L, ισχύει

$$|f(t,y) - f(t,z)| \le L\,|y - z|$$

όποτε τα σημεία που εμφανίζονται ανήκουν στην περιοχή. Η ίδια σταθερά L ισχύει για όλα τα εκεί t.

Η συνέχεια της μερικής παραγώγου f_y είναι μια βολική, αλλά ισχυρότερη από όσο χρειάζεται, επαρκής συνθήκη: εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής.

Πρόταση 1.4 (Ένας απλός έλεγχος της συνθήκης Lipschitz)**.** *Αν οι f, f_y είναι συνεχείς στο ορθογώνιο*

$$R = [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b],$$

τότε η f είναι Lipschitz ως προς y στο R. Συγκεκριμένα, αν

$$L = \max_R |f_y(t,y)|\,,$$

τότε $|f(t,y) - f(t,z)| \le L\,|y - z|$ για $(t,y), (t,z) \in R$.

Απόδειξη. Κρατάμε το t σταθερό και θεωρούμε τη $f(t,\cdot)$ ως συνάρτηση μίας μεταβλητής. Για $y \neq z$, το θεώρημα μέσης τιμής δίνει κάποιο ξ μεταξύ y, z ώστε

$$f(t,y) - f(t,z) = f_y(t,\xi)(y - z).$$

Παίρνουμε απόλυτες τιμές και χρησιμοποιούμε το $|f_y(t,\xi)| \le L$. Για $y = z$, τα δύο μέλη της ζητούμενης ανισότητας είναι μηδέν. □

Λήμμα 1.5 (Αρχή συστολής στη μορφή που χρειαζόμαστε)**.** *Έστω B κλειστό υποσύνολο του $C([t_0 - h, t_0 + h])$, με νόρμα*

$$\|y\|_\infty = \max_{t \in [t_0 - h, t_0 + h]} |y(t)|\,.$$

Αν $T : B \to B$ και υπάρχει $q < 1$ με

$$\|Ty - Tz\|_\infty \le q\,\|y - z\|_\infty \qquad (y, z \in B),$$

τότε ο T έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο στο B.

Απόδειξη. Επιλέγουμε $y_0 \in B$ και ορίζουμε επαγωγικά $y_{n+1} = Ty_n$. Για τις πρώτες διαφορές έχουμε

$$\|y_2 - y_1\|_\infty = \|Ty_1 - Ty_0\|_\infty \le q\,\|y_1 - y_0\|_\infty\,.$$

Επαναλαμβάνοντας το ίδιο επιχείρημα βρίσκουμε

$$\|y_{n+1} - y_n\|_\infty \le q^n\,\|y_1 - y_0\|_\infty\,.$$

Αν $m > n$, η τριγωνική ανισότητα δίνει

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\|_\infty &\le \|y_m - y_{m-1}\|_\infty + \cdots + \|y_{n+1} - y_n\|_\infty \\ &\le (q^{m-1} + \cdots + q^n)\,\|y_1 - y_0\|_\infty\,.\end{aligned}$$

Το τελευταίο άθροισμα είναι το πολύ $q^n(1-q)^{-1}\|y_1-y_0\|_\infty$, που τείνει στο μηδέν καθώς $n\to\infty$. Άρα η (y_n) είναι ακολουθία Cauchy στην ομοιόμορφη νόρμα, οπότε συγκλίνει ομοιόμορφα σε συνεχή y. Επειδή το B είναι κλειστό, $y\in B$.

Απομένει να ελέγξουμε ότι $Ty=y$. Πράγματι,

$$\|Ty-y\|_\infty \le \|Ty-Ty_n\|_\infty + \|Ty_n-y_{n+1}\|_\infty + \|y_{n+1}-y\|_\infty .$$

Ο μεσαίος όρος είναι μηδέν, ο πρώτος δεν υπερβαίνει το $q\|y-y_n\|_\infty$, ενώ ο τελευταίος τείνει στο μηδέν. Συνεπώς $\|Ty-y\|_\infty=0$.

Αν u,v είναι δύο σταθερά σημεία, τότε

$$\|u-v\|_\infty = \|Tu-Tv\|_\infty \le q\,\|u-v\|_\infty .$$

Αφού $q<1$, αναγκαστικά $\|u-v\|_\infty=0$, δηλαδή $u=v$. □

Θεώρημα 1.6 (Picard--Lindelöf)**.** *Έστω f συνεχής στο $R=[t_0-a,t_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]$ και Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, με σταθερά L. Τότε το πρόβλημα* (1.1) *έχει μοναδική λύση στο $[t_0-h,t_0+h]$, για κάθε αρκετά μικρό $h>0$. Αρκεί να επιλέξουμε*

$$h\le a,\qquad Mh\le b,\qquad Lh<1,\qquad M:=\max_R|f|\,.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $I=[t_0-h,t_0+h]$, $X=C(I)$ με την ομοιόμορφη νόρμα, και

$$B=\{y\in X:\|y-y_0\|_\infty\le b\}.$$

Το B αποτελείται από τις συνεχείς καμπύλες που παραμένουν στην κατακόρυφη λωρίδα $[y_0-b,y_0+b]$. Ορίζουμε

$$(Ty)(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds.$$

Θα ελέγξουμε αναλυτικά τις δύο προϋποθέσεις της αρχής συστολής.

Πρώτα, αν $y\in B$ και $t\in I$, τότε $(s,y(s))\in R$ για κάθε s μεταξύ t_0,t. Άρα $|f(s,y(s))|\le M$ και

$$|(Ty)(t)-y_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds\right| \le M\,|t-t_0| \le Mh \le b.$$

Για $t<t_0$ παίρνουμε την ίδια εκτίμηση αντιστρέφοντας τα όρια του ολοκληρώματος. Επομένως $T(B)\subset B$.

Δεύτερον, για $y,z\in B$, η συνθήκη Lipschitz δίνει

$$\begin{aligned}|(Ty)(t)-(Tz)(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t}\big[f(s,y(s))-f(s,z(s))\big]\,ds\right| \\ &\le L\,|t-t_0|\,\|y-z\|_\infty \le Lh\,\|y-z\|_\infty .\end{aligned}$$

Παίρνοντας μέγιστο ως προς t, έχουμε $\|Ty-Tz\|_\infty\le Lh\,\|y-z\|_\infty$. Επειδή $Lh<1$, ο T είναι συστολή του B, άρα από το προηγούμενο λήμμα έχει μοναδικό σταθερό σημείο $y\in B$. Η σχέση $Ty=y$ είναι ακριβώς η (1.2), οπότε από την Πρόταση 1.2 η y λύνει το πρόβλημα αρχικών τιμών.

Αν u,v είναι δύο οποιεσδήποτε λύσεις στο ίδιο I και τα γραφήματά τους μένουν στο R, η παραπάνω εκτίμηση δίνει

$$\|u-v\|_\infty \le Lh\,\|u-v\|_\infty .$$

Άρα $(1-Lh)\,\|u-v\|_\infty\le 0$. Εφόσον $1-Lh>0$ και η νόρμα δεν είναι αρνητική, οι λύσεις ταυτίζονται. □

Παράδειγμα 1.7 (Οι προσεγγίσεις Picard της εκθετικής)**.** Για $y' = y$, $y(0) = 1$, ξεκινάμε από $y_0(t) = 1$. Τότε

$$y_1 = 1 + t, \quad y_2 = 1 + t + \frac{t^2}{2!}, \quad y_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}.$$

Το όριο είναι e^t. Η κατασκευή δεν αποδεικνύει απλώς ύπαρξη: παράγει και συστηματικές προσεγγίσεις.

Παράδειγμα 1.8 (Μια μη γραμμική επανάληψη)**.** Για $y' = 1+y^2$, $y(0) = 0$, οι πρώτες προσεγγίσεις είναι

$$y_0 = 0, \quad y_1 = t, \quad y_2 = t + \frac{t^3}{3}, \quad y_3 = t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + \frac{t^7}{63}.$$

Εμφανίζονται οι πρώτοι όροι της σειράς Taylor της ακριβούς λύσης $y(t) = \tan t$, της οποίας το μέγιστο διάστημα είναι $(-\pi/2, \pi/2)$.

Παράδειγμα 1.9 (Ο ρόλος της υπόθεσης Lipschitz)**.** Το πρόβλημα $y' = y^{2/3}$, $y(0) = 0$ έχει τη μηδενική λύση, αλλά και

$$y_c(t) = \begin{cases} 0, & t \le c, \\ (t-c)^3/27, & t \ge c, \end{cases} \qquad c \ge 0.$$

Για $t < c$, και τα δύο μέλη της εξίσωσης είναι μηδέν. Για $t > c$, έχουμε $y_c'(t) = (t-c)^2/9 = y_c(t)^{2/3}$. Στο $t = c$, η συνάρτηση και η παράγωγός της από τις δύο πλευρές έχουν τιμή μηδέν, οπότε η y_c είναι C^1 και ικανοποιεί την εξίσωση και εκεί. Εφόσον $c \ge 0$, ισχύει επίσης $y_c(0) = 0$.

Η $f(y) = y^{2/3}$ είναι συνεχής, αλλά δεν είναι τοπικά Lipschitz στο μηδέν: για $h > 0$,

$$\frac{|f(h) - f(0)|}{|h - 0|} = h^{-1/3} \longrightarrow +\infty \qquad \text{καθώς } h \longrightarrow 0^+.$$

Άρα δεν υπάρχει πεπερασμένη σταθερά Lipschitz σε καμία περιοχή του μηδενός. Στο θεώρημα Picard--Lindelöf η συνθήκη Lipschitz είναι *υπόθεση*, ενώ η μοναδικότητα είναι *συμπέρασμα*. Το παράδειγμα δείχνει ότι, αν παραλείψουμε αυτή την υπόθεση και κρατήσουμε μόνο τη συνέχεια, η μοναδικότητα δεν είναι εξασφαλισμένη. Δεν ισχυριζόμαστε ότι κάθε εξίσωση της οποίας το δεξί μέλος δεν είναι Lipschitz έχει περισσότερες από μία λύσεις.

1.3 Η ανισότητα του Gronwall και η συνεχής εξάρτηση

Λήμμα 1.10 (Ανισότητα Gronwall)**.** *Έστω u, a, b συνεχείς και μη αρνητικές στο $[t_0, T]$. Αν*

$$u(t) \le a(t) + \int_{t_0}^{t} b(s)u(s)\,ds,$$

τότε

$$u(t) \le a(t) + \int_{t_0}^{t} a(s)b(s) \exp\!\left(\int_{s}^{t} b(r)\,dr \right) ds. \tag{1.3}$$

Αν επιπλέον η a είναι αύξουσα με την ευρεία έννοια, τότε

$$u(t) \le a(t) \exp\!\left(\int_{t_0}^{t} b(s)\,ds \right).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $v(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)u(s)\,ds$. Τότε $v(t_0) = 0$, $v \geq 0$, και το θεμελιώδες θεώρημα δίνει $v'(t) = b(t)u(t)$. Από την υπόθεση $u(t) \leq a(t) + v(t)$, άρα, επειδή $b(t) \geq 0$,

$$v'(t) - b(t)v(t) \leq b(t)a(t).$$

Εφαρμόζουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα όπως στις γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξης. Με $B(t) = \int_{t_0}^{t} b(r)\,dr$, ισχύει $(\mathrm{e}^{-B(t)})' = -b(t)\mathrm{e}^{-B(t)}$, και ο κανόνας παραγώγισης γινομένου δίνει

$$\frac{d}{dt}\big(\mathrm{e}^{-B(t)}v(t)\big) = \mathrm{e}^{-B(t)}(v'(t) - b(t)v(t)) \leq \mathrm{e}^{-B(t)}b(t)a(t).$$

Ολοκληρώνουμε από t_0 έως t, χρησιμοποιούμε $v(t_0) = 0$, και πολλαπλασιάζουμε με $\mathrm{e}^{B(t)}$:

$$v(t) \leq \int_{t_0}^{t} a(s)b(s)\exp\!\left(\int_{s}^{t} b(r)\,dr\right) ds.$$

Μαζί με $u(t) \leq a(t) + v(t)$ προκύπτει η (1.3). Αν η a είναι μη φθίνουσα, τότε για $s \leq t$ ισχύει $a(s) \leq a(t)$. Βγάζοντας το $a(t)$ έξω από το ολοκλήρωμα, το υπόλοιπο άθροισμα είναι

$$1 + \int_{t_0}^{t} b(s)\exp\!\left(\int_{s}^{t} b(r)\,dr\right) ds = \exp\!\left(\int_{t_0}^{t} b(r)\,dr\right);$$

η ισότητα προκύπτει παραγωγίζοντας την εκθετική ως προς το κάτω όριο s. Αυτό αποδεικνύει την απλούστερη εκτίμηση. □

Θεώρημα 1.11 (Συνεχής εξάρτηση)**.** *Έστω $f(t, y, \lambda)$ συνεχής σε συμπαγές σύνολο, όπου ισχύει*

$$|f(t, y, \lambda) - f(t, z, \mu)| \leq L_y\,|y - z| + L_\lambda\,|\lambda - \mu|\,.$$

Αν y, z είναι λύσεις των αντίστοιχων προβλημάτων αρχικών τιμών με δεδομένα (y_0, λ) και (z_0, μ) στο κοινό διάστημα $[t_0, T]$, τότε

$$|y(t) - z(t)| \leq \big(|y_0 - z_0| + L_\lambda(T - t_0)\,|\lambda - \mu|\big)\mathrm{e}^{L_y(t-t_0)}. \tag{1.4}$$

Άρα οι λύσεις εξαρτώνται συνεχώς, ομοιόμορφα σε συμπαγή χρονικά διαστήματα, από τις αρχικές τιμές και τις παραμέτρους.

Απόδειξη. Αφαιρούμε τις ολοκληρωτικές εξισώσεις

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s), \lambda)\,ds, \qquad z(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, z(s), \mu)\,ds$$

και παίρνουμε απόλυτες τιμές. Για τους ολοκληρωτέους όρους εισάγουμε και αφαιρούμε $f(s, z(s), \lambda)$:

$$\begin{aligned}
&|f(s, y(s), \lambda) - f(s, z(s), \mu)| \\
&\leq |f(s, y(s), \lambda) - f(s, z(s), \lambda)| + |f(s, z(s), \lambda) - f(s, z(s), \mu)| \\
&\leq L_y\,|y(s) - z(s)| + L_\lambda\,|\lambda - \mu|\,.
\end{aligned}$$

Άρα, αν $u(t) = |y(t) - z(t)|$, έχουμε

$$u(t) \leq |y_0 - z_0| + L_\lambda(t - t_0)\,|\lambda - \mu| + L_y \int_{t_0}^{t} u(s)\,ds.$$

Η συνάρτηση $a(t) = |y_0 - z_0| + L_\lambda(t - t_0)\,|\lambda - \mu|$ είναι μη αρνητική και μη φθίνουσα για $t \geq t_0$. Εφαρμόζουμε την απλούστερη μορφή της ανισότητας Gronwall και, τέλος, αντικαθιστούμε το $t - t_0$ του προπαράγοντα με το μεγαλύτερο $T - t_0$. □

Βασικό σημείο

Η συνεχής εξάρτηση έχει τοπικό χρονικό χαρακτήρα, εκτός αν ξέρουμε ήδη ότι οι λύσεις μένουν σε κοινό συμπαγές σύνολο. Κοντά σε χρόνο έκρηξης, μια μικρή αλλαγή των δεδομένων μπορεί να μετακινήσει την ασύμπτωτη κατακόρυφη ευθεία και να καταστρέψει την ομοιόμορφη σύγκλιση.

1.4 Συνέχιση λύσεων και ολική ύπαρξη

Οι τοπικές λύσεις συγκολλούνται μοναδικά. Επομένως κάθε πρόβλημα που ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Picard έχει μοναδική μέγιστη λύση σε ανοιχτό διάστημα $(\alpha, \beta) \ni t_0$.

Θεώρημα 1.12 (Θεώρημα συνέχισης)**.** *Έστω $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής και τοπικά Lipschitz ως προς y, και $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ μέγιστη λύση. Αν $\beta < \infty$, το γράφημα $\{(t, y(t)) : t_0 \le t < \beta\}$ εγκαταλείπει οριστικά κάθε συμπαγές υποσύνολο του D καθώς $t \uparrow \beta$. Ανάλογη δήλωση ισχύει και στο α.*

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε τη δήλωση για το δεξί άκρο. Στο αριστερό αντιστρέφουμε την κατεύθυνση του χρόνου.

Το κλειδί είναι ότι ο τοπικός χρόνος ύπαρξης επιλέγεται *ομοιόμορφα* πάνω σε ένα συμπαγές $K \subset D$. Για κάθε σημείο του K υπάρχει ένα μικρό ορθογώνιο μέσα στο ανοιχτό D. Επιλέγουμε πεπερασμένα τέτοια ορθογώνια που καλύπτουν το K, μικραίνοντάς τα αν χρειάζεται ώστε η κλειστή τους μορφή να παραμένει στο D. Στο εσωτερικό καθενός, οι εκτιμήσεις της απόδειξης Picard δίνουν θετικό χρόνο ύπαρξης για αρχικά σημεία σε ένα μικρότερο ορθογώνιο. Το ελάχιστο των πεπερασμένων αυτών θετικών χρόνων είναι ένας αριθμός $h_K > 0$, κοινός για όλα τα αρχικά σημεία $(\tau, \eta) \in K$. Συνεπώς το πρόβλημα

$$u' = f(t, u), \qquad u(\tau) = \eta$$

έχει μοναδική λύση τουλάχιστον για $\tau - h_K < t < \tau + h_K$. Εδώ ακριβώς χρησιμοποιείται η συμπάγεια.

Αν το γράφημα δεν εγκατέλειπε οριστικά κάποιο συμπαγές $K \subset D$, θα υπήρχαν χρόνοι $t_n \uparrow \beta$ με $(t_n, y(t_n)) \in K$. Επιλέγουμε n τόσο μεγάλο ώστε $t_n + h_K > \beta$. Από την ομοιόμορφη τοπική ύπαρξη παίρνουμε μια λύση u, με $u(t_n) = y(t_n)$, η οποία ορίζεται πέρα από το β. Στο κοινό διάστημα ορισμού, οι u, y λύνουν το ίδιο πρόβλημα στη στιγμή t_n, οπότε, από τη μοναδικότητα, συμπίπτουν. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε

$$\widetilde{y}(t) = \begin{cases} y(t), & t < t_n, \\ u(t), & t \ge t_n. \end{cases}$$

Οι δύο κλάδοι ταυτίζονται κοντά στο t_n, άρα η νέα συνάρτηση είναι πράγματι λύση τάξης C^1 που επεκτείνει την αρχική πέρα από το β. Αυτό αντιφάσκει στη μεγιστότητα. Συνεπώς το γράφημα εγκαταλείπει οριστικά κάθε συμπαγές του D. □

Πόρισμα 1.13 (Εναλλακτική της έκρηξης)**.** *Αν $D = \mathbb{R}^2$ και το δεξί άκρο β της μέγιστης λύσης είναι πεπερασμένο, τότε*

$$|y(t)| \longrightarrow \infty \qquad (t \uparrow \beta).$$

Απόδειξη. Οποιοσδήποτε αριθμός $B > 0$ ορίζει συμπαγές ορθογώνιο

$$K_B = [t_0, \beta] \times [-B, B] \subset \mathbb{R}^2.$$

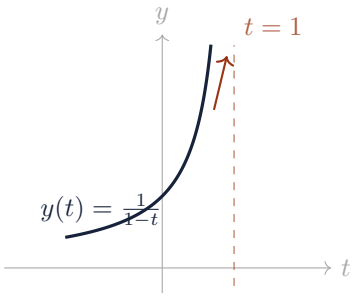
Από το θεώρημα συνέχισης, το γράφημα της λύσης τελικά εξέρχεται από το K_B. Επειδή ήδη $t \in [t_0, \beta]$, αυτό σημαίνει ακριβώς ότι $|y(t)| > B$. Έτσι, για κάθε $B > 0$, υπάρχει $\tau < \beta$ με

$$\tau < t < \beta \quad \Longrightarrow \quad |y(t)| > B,$$

που είναι ο ορισμός του $|y(t)| \to \infty$ καθώς $t \uparrow \beta$. □

Γιατί το πεπερασμένο άκρο συνεπάγεται έκρηξη

Όταν η εξίσωση ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}^2$, ο χρόνος παραμένει στο φραγμένο διάστημα $[t_0, \beta]$. Ο μόνος τρόπος να εγκαταλείψει το γράφημα κάθε συμπαγές ορθογώνιο είναι να γίνει απεριόριστη η συντεταγμένη y. Γι' αυτό $\beta < \infty$ επιβάλλει $|y(t)| \to \infty$.



Σχήμα 1.1: Έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο για την $y' = y^2$, $y(0) = 1$: η λύση γίνεται απεριόριστη καθώς $t \uparrow 1$.

Παράδειγμα 1.14 (Διορθωμένο μέγιστο διάστημα)**.** Για $y' = y^2$, $y(0) = 1$, ο χωρισμός μεταβλητών δίνει

$$y(t) = \frac{1}{1-t}, \qquad -\infty < t < 1.$$

Το δεξί άκρο είναι πεπερασμένο και $y(t) \to +\infty$ καθώς $t \uparrow 1$. Η έκφραση $1/t$, που μπορεί να προκύψει αν ξεχάσουμε τη σταθερά ολοκλήρωσης, δεν ικανοποιεί την αρχική συνθήκη.

Θεώρημα 1.15 (Η γραμμική αύξηση συνεπάγεται ολική ύπαρξη)**.** *Αν η f είναι συνεχής, τοπικά Lipschitz ως προς y, και*

$$|f(t,y)| \le C_1 + C_2\,|y| \qquad ((t,y) \in \mathbb{R}^2),$$

τότε κάθε λύση ορίζεται για όλα τα $t \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Σε οποιοδήποτε πεπερασμένο διάστημα δεξιά του t_0,

$$|y(t)| \le |y_0| + C_1(t - t_0) + C_2 \int_{t_0}^{t} |y(s)|\, ds.$$

Η ανισότητα Gronwall δίνει, για $t \le T$,

$$|y(t)| \le \big(|y_0| + C_1(T - t_0)\big)\mathrm{e}^{C_2(T - t_0)}.$$

Η εκτίμηση ισχύει όσο υπάρχει η λύση. Αν το δεξί μέγιστο άκρο β ήταν πεπερασμένο, θα θέταμε $T = \beta$ στην παραπάνω αριθμητική έκφραση, χωρίς να απαιτούμε να υπάρχει η λύση στο β. Θα παίρναμε ενιαίο φράγμα για όλα τα $t < \beta$, σε αντίφαση με το Πόρισμα 1.13. Άρα $\beta = \infty$. Αντιστρέφοντας τον χρόνο αποδεικνύουμε και την ύπαρξη προς τα αριστερά. □

Παράδειγμα 1.16. Η $y' = y \sin y + t$ ικανοποιεί $|y \sin y + t| \le |y| + |t|$. Σε κάθε φραγμένο χρονικό διάστημα αυτό δίνει εκτίμηση γραμμικής αύξησης, άρα όλες οι τοπικές λύσεις επεκτείνονται σε όλο το $\mathbb{R}$. Αντίθετα, για $y' = y^{1+\varepsilon}$, $y(0) = 1$, $\varepsilon > 0$, έχουμε

$$y(t) = (1 - \varepsilon t)^{-1/\varepsilon},$$

που εκρήγνυται στη στιγμή $1/\varepsilon$.

Ασκήσεις

Άσκηση 1.1. *(Ασθενέστερη υπόθεση για την παράγωγο)* Έστω $D = (a, b) \times (c, d)$ και f συνεχής στο D. Υποθέστε ότι η f_y είναι συνεχής και φραγμένη στο

$$D \setminus \{(t, y_k) : a < t < b,\ k = 1, \dots, n\}.$$

Δείξτε ότι η f είναι Lipschitz ως προς y σε κάθε συμπαγές υποορθογώνιο του D, και συμπεράνετε τοπική ύπαρξη και μοναδικότητα. Υπόδειξη: χωρίστε το διάστημα μεταξύ δύο τιμών του y στα εξαιρετικά επίπεδα.

Άσκηση 1.2. *(Επαναλήψεις Picard)* Υπολογίστε τις τρεις πρώτες προσεγγίσεις Picard για καθεμία από τις

$$\begin{array}{ll} (a) & y' = t^2 + y^2, \qquad y(0) = 1, \\ (b) & y' = 1 - y^3, \qquad y(-1) = 3, \\ (c) & y' = t(3 - 2y), \quad y(1) = 2. \end{array}$$

Στο (c), συγκρίνετε με την ακριβή λύση.

Άσκηση 1.3. Αποδείξτε απευθείας, με εκτίμηση εκ των προτέρων και το θεώρημα συνέχισης, ότι η λύση της $y' = y \sin y + t$, $y(0) = \pi/2$, είναι ολική.

Άσκηση 1.4. Γράψτε το Θεώρημα 1.11 στη μορφή ε-δ: δοσμένου $\varepsilon > 0$, βρείτε συνθήκη για το $|y_0 - z_0| + |\lambda - \mu|$ που συνεπάγεται $\sup_{[t_0,T]} |y - z| < \varepsilon$.

Άσκηση 1.5. *(Σύγκλιση μακριά από κινούμενο πόλο)* Η y_n λύνει την

$$y_n' = \frac{1}{n} y_n + y_n^2, \qquad y_n(0) = \frac{n-1}{n}.$$

Βρείτε την y_n ρητά. Προσδιορίστε τα διαστήματα όπου συγκλίνει ομοιόμορφα και το όριο. Εξηγήστε γιατί η συνεχής εξάρτηση δεν δίνει ομοιόμορφη σύγκλιση πέρα από τον οριακό χρόνο έκρηξης.

Άσκηση 1.6. Αποδείξτε τη γενική μορφή (1.3) της ανισότητας Gronwall και, όταν η a είναι μη φθίνουσα, την απλούστερη μορφή της.

Άσκηση 1.7. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ολικά Lipschitz, δείξτε ότι κάθε λύση της $y' = f(y)$ είναι ολική. Ξεκινήστε με μια εκτίμηση γραμμικής αύξησης.

Άσκηση 1.8. Για $p > 0$, εξετάστε ύπαρξη, μοναδικότητα και έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο για $y' = |y|^p$, $y(0) = 0$, και για την ίδια εξίσωση με $y(0) = 1$.

Άσκηση 1.9. *(Κριτήριο Osgood, αυξημένης δυσκολίας)* Αν $g : [1, \infty) \to (0, \infty)$ είναι τοπικά Lipschitz, δείξτε ότι η λύση της $y' = g(y)$, $y(0) = 1$, φτάνει στο άπειρο σε πεπερασμένο χρόνο αν και μόνο αν $\int_1^\infty ds/g(s) < \infty$.

Άσκηση 1.10. Υποθέστε ότι $f(t, y)y \leq A(t) + B(t)y^2$, όπου $A, B \geq 0$ είναι συνεχείς. Βρείτε φράγμα για το $y(t)^2$ σε συμπαγή χρονικά διαστήματα και συναγάγετε κριτήριο συνέχισης ασθενέστερο από τη σημειακή υπόθεση γραμμικής αύξησης.

Κεφάλαιο 2

Συστήματα και εξισώσεις ανώτερης τάξης

2.1 Το διανυσματικό πρόβλημα αρχικών τιμών

Θεωρούμε το σύστημα

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}), \qquad \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0, \qquad \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Όλες οι νόρμες στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμες. Συνήθως χρησιμοποιούμε την Ευκλείδεια νόρμα, ενώ στις εκτιμήσεις συχνά βολεύει η μέγιστη νόρμα.

Ορισμός 2.1. Η $\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι *τοπικά Lipschitz ως προς* $\boldsymbol{y}$ αν κοντά σε κάθε σημείο του D ισχύει, για κάποιο L,

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{z})\| \le L \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\|.$$

Αν ο πίνακας μερικών παραγώγων $D_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{f}$ υπάρχει και είναι συνεχής, η ιδιότητα ισχύει σε κάθε συμπαγές, κυρτό υποσύνολο του D.

Θεώρημα 2.2 (Picard--Lindelöf για συστήματα)**.** *Αν η $\boldsymbol{f}$ είναι συνεχής και τοπικά Lipschitz ως προς $\boldsymbol{y}$, η (2.1) έχει μοναδική τοπική λύση με μοναδικό μέγιστο διάστημα (α, β). Αν $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ και $\beta < \infty$, τότε $\|\boldsymbol{y}(t)\| \to \infty$ καθώς $t \uparrow \beta$.*

Απόδειξη. Επαναλαμβάνουμε όλα τα ουσιαστικά βήματα της βαθμωτής απόδειξης. Επιλέγουμε κλειστό ορθογώνιο

$$R = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B(\boldsymbol{y}_0, b)} \subset D, \qquad \overline{B(\boldsymbol{y}_0, b)} = \{\boldsymbol{y} : \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0\| \le b\}.$$

Το R είναι συμπαγές: υπάρχει $M = \max_R \|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})\|$ και σταθερά Lipschitz L. Διαλέγουμε $h > 0$ ώστε $h \le a$, $Mh \le b$, $Lh < 1$. Θέτουμε $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ και

$$B = \{\boldsymbol{y} \in C(I, \mathbb{R}^n) : \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0\|_\infty := \max_{t \in I} \|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}_0\| \le b\}.$$

Το B είναι κλειστό στον χώρο των συνεχών διανυσματικών συναρτήσεων, άρα είναι πλήρες. Ορίζουμε, κατά συνιστώσες, το ολοκλήρωμα

$$(T\boldsymbol{y})(t) = \boldsymbol{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s))\, ds.$$

Για $\boldsymbol{y} \in B$ και $t \in I$, η ανισότητα για ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης δίνει

$$\|(T\boldsymbol{y})(t) - \boldsymbol{y}_0\| \le \int_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} \|\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s))\|\, ds \le M\,|t - t_0| \le Mh \le b.$$

Άρα $T(B) \subset B$. Αν $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in B$, η ίδια ανισότητα, μαζί με τη συνθήκη Lipschitz, δίνει

$$\begin{aligned}\|(T\boldsymbol{y})(t) - (T\boldsymbol{z})(t)\| &\le \int_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} \|\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{y}(s)) - \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{z}(s))\|\, ds \\ &\le L\,|t-t_0|\,\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|_\infty \le Lh\,\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|_\infty .\end{aligned}$$

Παίρνοντας μέγιστο στο I, ο T είναι συστολή με σταθερά $Lh < 1$. Η αρχή συστολής δίνει μοναδικό σταθερό σημείο. Η διανυσματική μορφή του θεμελιώδους θεωρήματος, εφαρμοσμένη σε κάθε συνιστώσα, μετατρέπει την ολοκληρωτική εξίσωση σε λύση του συστήματος. Αν δύο λύσεις έχουν τις ίδιες αρχικές τιμές, η ίδια ανισότητα στο κοινό μικρό τους διάστημα τις ταυτίζει. Επαναλαμβάνοντας σε διαδοχικά μικρά διαστήματα παίρνουμε μοναδικότητα σε ολόκληρο το κοινό διάστημα.

Επεκτείνουμε τη λύση όσο ισχύει το τοπικό θεώρημα. Για να δικαιολογήσουμε προσεκτικά την τελευταία δήλωση, επαναλαμβάνουμε το επιχείρημα συνέχισης: αν $\beta < \infty$ και η νόρμα $\|\boldsymbol{y}(t)\|$ δεν έτεινε στο άπειρο, θα υπήρχαν $B > 0$ και χρόνοι $t_k \uparrow \beta$ με $\|\boldsymbol{y}(t_k)\| \le B$. Τα σημεία $(t_k, \boldsymbol{y}(t_k))$ θα ανήκαν στο συμπαγές $K = [t_0, \beta] \times \overline{B(0,B)} \subset D$. Καλύπτουμε το K με πεπερασμένα μικρά κουτιά μέσα στο D. Οι ομοιόμορφες εκτιμήσεις $h \le a$, $Mh \le b$, $Lh < 1$ σε αυτά δίνουν έναν κοινό χρόνο $h_K > 0$ για όλα τα αρχικά σημεία του K. Παίρνουμε k με $t_k + h_K > \beta$ και λύνουμε ξανά από το $(t_k, \boldsymbol{y}(t_k))$. Η νέα λύση συμπίπτει με την παλιά, από μοναδικότητα, στο κοινό τους διάστημα· συγκολλώντας τις, επεκτείνουμε τη μέγιστη λύση πέρα από το β, άτοπο. Αυτό αποδεικνύει $\|\boldsymbol{y}(t)\| \to \infty$, όχι απλώς ότι η νόρμα δεν έχει όριο. Η ισοδυναμία νορμών δείχνει ότι το συμπέρασμα δεν εξαρτάται από την επιλογή της νόρμας. □

Η ανισότητα Gronwall ισχύει και για συστήματα: αν δύο λύσεις έχουν κοινή σταθερά Lipschitz L, τότε

$$\|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{z}(t)\| \le \|\boldsymbol{y}(t_0) - \boldsymbol{z}(t_0)\|\, \mathrm{e}^{L|t-t_0|}. \tag{2.2}$$

Θεώρημα 2.3 (Γραμμική αύξηση για διανύσματα)**.** *Αν $\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})\| \le C_1 + C_2\|\boldsymbol{y}\|$ παντού και η $\boldsymbol{f}$ είναι τοπικά Lipschitz ως προς $\boldsymbol{y}$, κάθε λύση της* (2.1) *είναι ολική.*

Απόδειξη. Από την ολοκληρωτική εξίσωση, $\|\boldsymbol{y}(t)\| \le \|\boldsymbol{y}_0\| + C_1(t-t_0) + C_2\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{y}(s)\|\,ds$ για $t \ge t_0$. Η ανισότητα Gronwall δίνει ενιαίο φράγμα σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Η εναλλακτική της έκρηξης αποκλείει πεπερασμένο μέγιστο άκρο. Προς τα αριστερά αντιστρέφουμε τον χρόνο. □

Παράδειγμα 2.4 (Τριγωνικό ολικό σύστημα)**.** Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολικά Lipschitz και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Για $y' = g(y)$, $z' = f(y)z$, η πρώτη εξίσωση έχει ολική λύση. Σε κάθε πεπερασμένο διάστημα το σύνολο τιμών της y είναι συμπαγές, οπότε η $f(y(t))$ είναι φραγμένη. Η δεύτερη εξίσωση δίνει

$$z(t) = z_0 \exp\!\left(\int_{t_0}^{t} f(y(s))\,ds\right).$$

Επομένως όλο το σύστημα είναι ολικό χωρίς ολική υπόθεση αύξησης για την f.

2.2 Αναγωγή της τάξης

Μια εξίσωση τάξης m λυμένη ως προς την ανώτατη παράγωγο,

$$y^{(m)} = F(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}), \tag{2.3}$$

μετατρέπεται σε σύστημα πρώτης τάξης αν θέσουμε

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \dots, \quad y_m = y^{(m-1)}.$$

Τότε

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3, \quad \dots, \quad y_{m-1}' = y_m, \quad y_m' = F(t, y_1, \dots, y_m). \tag{2.4}$$

Πόρισμα 2.5. *Αν η F είναι συνεχής και τοπικά Lipschitz ως προς $(y_1, \dots, y_m)$, κάθε διάνυσμα αρχικών τιμών*

$$\big(y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(m-1)}(t_0)\big) \in \mathbb{R}^m$$

ορίζει μοναδική τοπική λύση της (2.3)*.*

Παράδειγμα 2.6. Η $y''' + (y'')^2 + \mathrm{e}^t y y' - 2\sin(t) y^4 = 0$ ισοδυναμεί με

$$y_1' = y_2, \qquad y_2' = y_3, \qquad y_3' = -y_3^2 - \mathrm{e}^t y_1 y_2 + 2\sin(t) y_1^4.$$

Το δεξί μέλος είναι λείο, άρα κάθε τριάδα αρχικών τιμών για y, y', y'' ορίζει μοναδική τοπική λύση.

Παράδειγμα 2.7 (Η ανώτατη παράγωγος εμφανίζεται έμμεσα)**.** Πριν αναγάγουμε την

$$y^{(4)} = y^2 (y')^2 + y''' y'' - \mathrm{e}^{2t} y^{(4)},$$

λύνουμε ως προς την ανώτατη παράγωγο:

$$y^{(4)} = \frac{y^2 (y')^2 + y''' y''}{1 + \mathrm{e}^{2t}}.$$

Ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται ποτέ, άρα η συνήθης αναγωγή ισχύει για κάθε t. Σε συζευγμένες εξισώσεις εισάγουμε μία νέα μεταβλητή για κάθε παράγωγο κάτω από την ανώτατη· η διάσταση του συστήματος ισούται με το άθροισμα των τάξεων.

Ασκήσεις

Άσκηση 2.1. Αποδείξτε πλήρως το Παράδειγμα 2.4. Πού χρησιμοποιείται η ολική συνθήκη Lipschitz για την g; Δώστε αντιπαράδειγμα με την g μόνο τοπικά Lipschitz.

Άσκηση 2.2. *(Αναγωγή σε πρώτη τάξη)* Μετατρέψτε σε ρητά συστήματα πρώτης τάξης και βρείτε τη διάστασή τους:

(i) $y''' + (y'')^2 + \mathrm{e}^t y y' - 2\sin(t) y^4 = 0$.

(ii) $y^{(4)} = y^2 (y')^2 + y''' y'' - \mathrm{e}^{2t} y^{(4)}$.

(iii) $\begin{cases} y^{(4)} + (z'')^2 y^3 - t^{10} y'' z + z^3 (y')^4 = 0, \\ z''' = (y''')^2 - \mathrm{e}^{2t} (z')^2 + y'' z^5. \end{cases}$

Άσκηση 2.3. Δείξτε ότι το πρόβλημα $y'' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = y'(0) = 0$, έχει πολλές λύσεις. Ποια ακριβώς συνθήκη Lipschitz αποτυγχάνει στο σύστημα πρώτης τάξης;

Άσκηση 2.4. Αν $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής, τοπικά Lipschitz ως προς $\boldsymbol{y}$, και $\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) \le a(t) + b(t)\,\|\boldsymbol{y}\|^2$, με συνεχείς $a, b \ge 0$, αποδείξτε ότι κάθε λύση είναι ολική.

Άσκηση 2.5. Έστω $\boldsymbol{f} \in C^1$ και $\frac{1}{2}(D\boldsymbol{f} + D\boldsymbol{f}^T) \leq \mu I$ ως τετραγωνικές μορφές. Αποδείξτε για δύο λύσεις στο $[t_0, T]$ ότι

$$\|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{z}(t)\| \leq \mathrm{e}^{\mu(t-t_0)} \|\boldsymbol{y}(t_0) - \boldsymbol{z}(t_0)\|.$$

Συγκρίνετε με την εκτίμηση που προκύπτει από $\|D\boldsymbol{f}\|$.

Άσκηση 2.6. *(Αυξημένης δυσκολίας)* Αν το δεξί μέλος της (2.3) ικανοποιεί

$$|F(t, x_1, \ldots, x_m)| \leq C(1 + |x_1| + \cdots + |x_m|),$$

δείξτε ότι κάθε λύση είναι ολική.

Κεφάλαιο 3

Γραμμικές εξισώσεις ανώτερης τάξης

3.1 Ομογενείς εξισώσεις και χώρος λύσεων

Σε διάστημα I, μελετούμε την κανονικοποιημένη γραμμική εξίσωση

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = g(t), \tag{3.1}$$

όπου οι συντελεστές και η g είναι συνεχείς.

Θεώρημα 3.1 (Ολικό γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών)**.** *Για κάθε $t_0 \in I$ και $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$, η (3.1) έχει μοναδική λύση σε όλο το I με*

$$y(t_0) = c_0, \quad y'(t_0) = c_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $x_1 = y, x_2 = y', \dots, x_n = y^{(n-1)}$. Η εξίσωση γίνεται

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad \dots, \quad x_{n-1}' = x_n, \\ x_n' = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \cdots - a_1(t)x_n + g(t). \end{cases}$$

Το δεξί μέλος είναι συνεχές και Lipschitz ως προς $\boldsymbol{x}$ σε κάθε συμπαγές χρονικό διάστημα. Πράγματι, οι συνεχείς συναρτήσεις a_j, g είναι φραγμένες σε κάθε $[A, B] \subset I$, άρα εκεί υπάρχει C ώστε $\|\boldsymbol{x}'\| \le C(1+\|\boldsymbol{x}\|)$. Το κριτήριο γραμμικής αύξησης αποκλείει έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο μέσα στο $[A, B]$. Επειδή κάθε εσωτερικό σημείο του I ανήκει σε τέτοιο διάστημα, η τοπική λύση επεκτείνεται σε όλο το I. Η μοναδικότητα προκύπτει από το αντίστοιχο θεώρημα για συστήματα. □

3.1.1 Γραμμικοί συνδυασμοί και γραμμική ανεξαρτησία

Ορισμός 3.2 (Γραμμική ανεξαρτησία συναρτήσεων)**.** Έστω $f_1, \dots, f_m : I \to \mathbb{R}$. Μια συνάρτηση της μορφής

$$f = c_1 f_1 + \cdots + c_m f_m, \qquad c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R},$$

λέγεται *γραμμικός συνδυασμός* των $f_1, \dots, f_m$. Οι συντελεστές c_j είναι *σταθεροί αριθμοί*. Οι συναρτήσεις λέγονται *γραμμικά ανεξάρτητες στο I* αν

$$c_1 f_1(t) + \cdots + c_m f_m(t) = 0 \quad \text{για κάθε } t \in I$$

συνεπάγεται $c_1 = \cdots = c_m = 0$. Αν υπάρχει τέτοια σχέση με τουλάχιστον έναν μη μηδενικό συντελεστή, λέγονται *γραμμικά εξαρτημένες στο I*.

Η σχέση πρέπει να ισχύει σε *όλο* το διάστημα με τους ίδιους συντελεστές. Μια ισότητα σε ένα μόνο σημείο δεν αρκεί. Αν, για παράδειγμα, $c_k \neq 0$ σε μια σχέση εξάρτησης, τότε

$$f_k = -\sum_{j \neq k} \frac{c_j}{c_k} f_j.$$

Άρα μία από τις συναρτήσεις εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Για μιγαδικές συναρτήσεις χρησιμοποιούμε τον ίδιο ορισμό με συντελεστές από το $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 3.3. Οι $1, t$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο $\mathbb{R}$: αν $c_1 + c_2 t = 0$ για κάθε t, θέτοντας $t = 0$ βρίσκουμε $c_1 = 0$, και θέτοντας $t = 1$ βρίσκουμε $c_2 = 0$. Οι $1, t, 1+t$ είναι εξαρτημένες, αφού $1 + t - (1 + t) = 0$ με συντελεστές $1, 1, -1$. Επίσης, οι t, t^2 είναι ανεξάρτητες στο $\mathbb{R}$, παρότι μηδενίζονται και οι δύο στο 0: από $at + bt^2 = 0$ στις τιμές $t = 1, -1$ προκύπτουν $a + b = 0$, $-a + b = 0$, άρα $a = b = 0$.

Έστω $\mathcal{S}_h$ το σύνολο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης που προκύπτει από την (3.1) αν θέσουμε $g = 0$. Άθροισμα λύσεων και σταθερό πολλαπλάσιο λύσης είναι πάλι λύσεις, επειδή η παραγώγιση είναι γραμμική πράξη. Το σύνολο αυτό είναι λοιπόν *διανυσματικός χώρος* συναρτήσεων.

Ορισμός 3.4 (Θεμελιώδες σύστημα λύσεων)**.** Μια οικογένεια λύσεων $y_1, \dots, y_n$ λέγεται *βάση* του $\mathcal{S}_h$, ή *θεμελιώδες σύστημα λύσεων*, αν είναι γραμμικά ανεξάρτητη και κάθε $y \in \mathcal{S}_h$ γράφεται

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

Για $n = 2$ λέμε και *θεμελιώδες ζεύγος*.

Η ανεξαρτησία εξασφαλίζει ότι οι συντελεστές της παραπάνω γραφής είναι μοναδικοί: αφαιρώντας δύο τέτοιες γραφές, έχουμε $\sum_j (c_j - d_j) y_j = 0$, άρα $c_j = d_j$ για κάθε j.

Πρόταση 3.5. *Το $\mathcal{S}_h$ είναι διανυσματικός χώρος διάστασης n. Δηλαδή έχει βάση με n στοιχεία. Η απεικόνιση*

$$E_{t_0} : \mathcal{S}_h \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad E_{t_0}(y) = \big(y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)\big)$$

είναι γραμμικός ισομορφισμός: είναι γραμμική, ένα προς ένα και επί.

Απόδειξη. Η παραγώγιση και η αποτίμηση σε σημείο δίνουν $E_{t_0}(ay + bz) = aE_{t_0}(y) + bE_{t_0}(z)$, δηλαδή γραμμικότητα. Το Θεώρημα 3.1 εξασφαλίζει μία και μόνο μία λύση για κάθε διάνυσμα αρχικών τιμών. Άρα η E_{t_0} είναι επί και ένα προς ένα.

Για να δούμε συγκεκριμένα τη βάση, έστω u_j η λύση της οποίας το διάνυσμα αρχικών τιμών έχει 1 στη θέση j και 0 στις άλλες θέσεις, για $j = 1, \dots, n$. Αν $\sum_j d_j u_j = 0$, οι αρχικές τιμές αυτής της σχέσης δίνουν $(d_1, \dots, d_n) = (0, \dots, 0)$. Άρα οι u_j είναι ανεξάρτητες. Αν τώρα η y έχει αρχικές τιμές $(c_0, \dots, c_{n-1})$, η λύση $\sum_{j=1}^{n} c_{j-1} u_j$ έχει τις ίδιες αρχικές τιμές. Από τη μοναδικότητα είναι ίση με την y σε όλο το I. Επομένως οι u_j αποτελούν βάση. □

3.1.2 Η ορίζουσα Wronski και το κριτήριο ανεξαρτησίας

Ορισμός 3.6 (Ορίζουσα Wronski)**.** Για $y_1, \dots, y_n \in C^{n-1}(I)$, δηλαδή συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους μέχρι τάξης $n-1$, η *ορίζουσα Wronski* είναι η συνάρτηση

$$W(y_1, \dots, y_n)(t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Για δύο συναρτήσεις ο τύπος είναι

$$W(y_1, y_2)(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

Χρειαζόμαστε το εξής κριτήριο της γραμμικής άλγεβρας: για έναν τετραγωνικό πίνακα M, η $\det M \neq 0$ σημαίνει ότι το σύστημα $M\boldsymbol{c} = 0$ έχει μόνο τη λύση $\boldsymbol{c} = 0$. Αν $\det M = 0$, υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $\boldsymbol{c}$ που λύνει αυτό το σύστημα. Για να συνδέσουμε αυτό το κριτήριο με την επίλυση εξισώσεων, μπορούμε να κάνουμε απαλοιφή Gauss: οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών διατηρούν τις λύσεις του ομογενούς συστήματος και διατηρούν το αν η ορίζουσα είναι μηδέν. Αν ο τελικός κλιμακωτός πίνακας έχει n μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία, η διαδοχική αντικατάσταση από την τελευταία εξίσωση προς την πρώτη δίνει μόνο μηδενικούς αγνώστους. Διαφορετικά υπάρχει ελεύθερος άγνωστος, στον οποίο μπορούμε να δώσουμε μη μηδενική τιμή. Ειδικά για πίνακα $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, η ορίζουσα είναι $ad - bc$.

Πρόταση 3.7 (Τι ισχύει για γενικές συναρτήσεις)**.** *Αν οι $y_1, \dots, y_n \in C^{n-1}(I)$ είναι γραμμικά εξαρτημένες, τότε $W(t) = 0$ για κάθε $t \in I$. Συνεπώς, αν $W(t_0) \neq 0$ έστω σε ένα σημείο, οι συναρτήσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο I.*

Απόδειξη. Η εξάρτηση σημαίνει ότι υπάρχουν σταθεροί συντελεστές $c_1, \dots, c_n$, όχι όλοι μηδέν, με $\sum_j c_j y_j(t) = 0$ για κάθε $t \in I$. Παραγωγίζουμε αυτή την ταυτότητα k φορές, για $k = 0, \dots, n-1$, και βρίσκουμε $\sum_j c_j y_j^{(k)}(t) = 0$. Άρα σε κάθε t ο πίνακας του Wronski, πολλαπλασιασμένος με το ίδιο μη μηδενικό $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$, δίνει μηδέν. Το προηγούμενο κριτήριο δίνει $W(t) = 0$. Αν λοιπόν $W(t_0) \neq 0$, η εξάρτηση θα οδηγούσε σε αντίφαση, οπότε έχουμε ανεξαρτησία. □

Παράδειγμα 3.8 (Ημίτονο και συνημίτονο)**.** Για $y_1 = \cos t$, $y_2 = \sin t$,

$$W(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Επομένως οι δύο συναρτήσεις είναι ανεξάρτητες σε κάθε διάστημα με εσωτερικά σημεία. Επιπλέον λύνουν την $y'' + y = 0$.

Θεώρημα 3.9 (Κριτήριο Wronski για λύσεις της ίδιας εξίσωσης)**.** *Έστω $y_1, \dots, y_n$ λύσεις της ίδιας ομογενούς εξίσωσης* (3.1)*, με συνεχείς συντελεστές στο διάστημα I. Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Οι $y_1, \dots, y_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο I.*

(ii) *Υπάρχει $t_0 \in I$ με $W(t_0) \neq 0$.*

(iii) *Ισχύει $W(t) \neq 0$ για κάθε $t \in I$.*

(iv) *Οι $y_1, \dots, y_n$ είναι θεμελιώδες σύστημα λύσεων.*

Απόδειξη. Το ουσιαστικό βήμα είναι να δείξουμε τι συμβαίνει αν $W(t_0) = 0$. Το ομογενές αλγεβρικό σύστημα

$$\sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(k)}(t_0) = 0, \qquad k = 0, \dots, n-1,$$

έχει τότε μια λύση $(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$. Θέτουμε $z = \sum_j c_j y_j$. Από τη γραμμικότητα, η z λύνει την ίδια ομογενή διαφορική εξίσωση. Οι παραπάνω σχέσεις λένε ότι $z(t_0) = z'(t_0) = \cdots = z^{(n-1)}(t_0) = 0$. Η μηδενική συνάρτηση λύνει επίσης την εξίσωση με αυτές τις αρχικές τιμές. Από τη μοναδικότητα του Θεωρήματος 3.1, $z = 0$ σε όλο το I. Έχουμε λοιπόν σχέση εξάρτησης με σταθερούς συντελεστές. Αυτό δείχνει ότι (i) συνεπάγεται (iii). Η (iii) συνεπάγεται την (ii), και η (ii) συνεπάγεται την (i) από την Πρόταση 3.7.

Έστω τώρα $W(t_0) \neq 0$ και y οποιαδήποτε ομογενής λύση. Ο αντιστρέψιμος πίνακας του Wronski στο t_0 επιτρέπει να βρούμε μοναδικούς c_j ώστε

$$\sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(k)}(t_0) = y^{(k)}(t_0), \qquad k = 0, \dots, n-1.$$

Η $\sum_j c_j y_j$ και η y έχουν λοιπόν ίδιες αρχικές τιμές και, από μοναδικότητα, συμπίπτουν σε όλο το I. Μαζί με την ανεξαρτησία, αυτό δίνει την (iv). Τέλος, η (iv) περιλαμβάνει την (i) στον ορισμό της. □

Έτσι, στο προηγούμενο παράδειγμα οι $\cos t, \sin t$ αποτελούν θεμελιώδες ζεύγος και κάθε λύση της $y'' + y = 0$ γράφεται $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$.

Παράδειγμα 3.10 (Γιατί χρειάζεται η κοινή διαφορική εξίσωση)**.** Στο $\mathbb{R}$, θέτουμε $f(t) = t^2$, $g(t) = t|t|$. Έχουμε

$$g(t) = \begin{cases} t^2, & t \geq 0, \\ -t^2, & t < 0, \end{cases} \qquad g'(t) = \begin{cases} 2t, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -2t, & t < 0. \end{cases}$$

Στο 0 ο ορισμός της παραγώγου δίνει $g'(0) = \lim_{h\to 0} h|h|/h = \lim_{h\to 0} |h| = 0$. Άρα $g' = 2|t|$ είναι συνεχής, και $f, g \in C^1(\mathbb{R})$. Για $t > 0$, $W(f,g) = t^2(2t) - (2t)t^2 = 0$. Για $t < 0$, $W(f,g) = t^2(-2t) - (2t)(-t^2) = 0$, και στο 0 όλοι οι όροι είναι μηδέν. Παρ' όλα αυτά, αν $af + bg = 0$ στο $\mathbb{R}$, οι τιμές $t = 1$ και $t = -1$ δίνουν $a + b = 0$ και $a - b = 0$, άρα $a = b = 0$. Επομένως είναι ανεξάρτητες στο $\mathbb{R}$, παρότι η ορίζουσα Wronski είναι παντού μηδέν. Δεν πρόκειται για λύσεις μιας κοινής κανονικοποιημένης γραμμικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με συνεχείς συντελεστές σε όλο το $\mathbb{R}$: μάλιστα η g δεν έχει δεύτερη παράγωγο στο 0.

Το διάστημα και οι υποθέσεις έχουν σημασία

Για γενικές συναρτήσεις, το $W(t_0) \neq 0$ αρκεί για ανεξαρτησία, αλλά το $W \equiv 0$ δεν αρκεί για εξάρτηση. Η ισοδυναμία ισχύει για λύσεις της ίδιας κανονικοποιημένης ομογενούς γραμμικής εξίσωσης με συνεχείς συντελεστές στο ίδιο διάστημα. Στο τελευταίο παράδειγμα οι f, g είναι εξαρτημένες στο $(0, \infty)$, όπου $g = f$, και στο $(-\infty, 0)$, όπου $g = -f$, αλλά ανεξάρτητες στο $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 3.11 (Ταυτότητα Abel)**.** *Αν $y_1,\dots,y_n$ λύνουν την ομογενή* (3.1)*, τότε*

$$W(t) = W(t_0)\exp\!\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds\right). \tag{3.2}$$

Επομένως η ορίζουσα Wronski είτε είναι παντού μηδέν στο I είτε δεν μηδενίζεται πουθενά στο I.

Απόδειξη. Έστω $R_i = (y_1^{(i-1)},\dots,y_n^{(i-1)})$, $i=1,\dots,n$, οι γραμμές του πίνακα Wronski. Γράφουμε $\mathcal{D}(v_1,\dots,v_n)$ για την ορίζουσα με γραμμές $v_1,\dots,v_n$. Από την πολυγραμμικότητα, η παράγωγος είναι το άθροισμα των οριζουσών όπου παραγωγίζεται μία γραμμή κάθε φορά:

$$W' = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}(R_1,\dots,R_{i-1},R_i',R_{i+1},\dots,R_n).$$

Για $i<n$, έχουμε $R_i' = R_{i+1}$, οπότε ο αντίστοιχος όρος έχει δύο ίδιες γραμμές και μηδενίζεται. Για την τελευταία γραμμή, η διαφορική εξίσωση δίνει

$$R_n' = -a_nR_1 - a_{n-1}R_2 - \cdots - a_1R_n.$$

Με γραμμικότητα ως προς αυτή τη γραμμή,

$$\begin{aligned} W' &= \mathcal{D}(R_1,\dots,R_{n-1},R_n') \\ &= -\sum_{j=1}^{n} a_{n+1-j}\,\mathcal{D}(R_1,\dots,R_{n-1},R_j) = -a_1W, \end{aligned}$$

αφού οι όροι με $j<n$ έχουν επαναλαμβανόμενη γραμμή, ενώ ο όρος με $j=n$ είναι $-a_1W$.

Θέτοντας $H(t)=\int_{t_0}^{t}a_1(s)\,ds$, βρίσκουμε

$$\frac{d}{dt}\big(\mathrm{e}^{H(t)}W(t)\big) = \mathrm{e}^{H(t)}\big(W'(t)+a_1(t)W(t)\big) = 0.$$

Άρα $\mathrm{e}^{H(t)}W(t) = W(t_0)$, δηλαδή ισχύει η (3.2). Η απόδειξη καλύπτει και το $W(t_0)=0$, αφού δεν διαιρέσαμε με W. Ο θετικός εκθετικός παράγοντας δίνει και το τελευταίο συμπέρασμα. □

3.2 Σταθεροί συντελεστές

Γράφουμε D για την παραγώγιση ως προς t, ώστε $Dy=y'$, $D^ky=y^{(k)}$ και $(D-r)y = y'-ry$. Στην

$$P(D)y := y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = 0, \tag{3.3}$$

η δοκιμή $y=\mathrm{e}^{rt}$ οδηγεί στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P(r)=r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_n$.

Θεώρημα 3.12 (Χαρακτηριστικές ρίζες)**.** *Αν $r\in\mathbb{C}$ είναι ρίζα του P με πολλαπλότητα m, τότε*

$$\mathrm{e}^{rt},\quad t\mathrm{e}^{rt},\quad \dots,\quad t^{m-1}\mathrm{e}^{rt}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες μιγαδικές λύσεις. Όλες οι ρίζες μαζί δίνουν βάση του μιγαδικού χώρου λύσεων. Για πραγματική εξίσωση, ένα ζεύγος συζυγών $r=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$, $\beta>0$, πολλαπλότητας m, δίνει πραγματικές λύσεις

$$t^k\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t),\qquad t^k\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t),\qquad 0\le k<m.$$

Απόδειξη. Αν r είναι ρίζα πολλαπλότητας m, τότε $P(D) = Q(D)(D-r)^m$. Από τον κανόνα γινομένου,

$$(D-r)(\mathrm{e}^{rt}q(t)) = \mathrm{e}^{rt}q'(t), \qquad (D-r)^m(\mathrm{e}^{rt}q(t)) = \mathrm{e}^{rt}q^{(m)}(t).$$

Αν το q είναι πολυώνυμο βαθμού μικρότερου από m, η τελευταία παράγωγος είναι μηδέν. Έτσι όλες οι συναρτήσεις $t^k\mathrm{e}^{rt}$, $0 \le k < m$, είναι λύσεις.

Πρέπει επίσης να ελέγξουμε την ανεξαρτησία *όλων* των ομάδων μαζί. Έστω $r_1, \dots, r_\ell$ οι διαφορετικές ρίζες, με πολλαπλότητες $m_1, \dots, m_\ell$, και υποθέτουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{e}^{r_j t} q_j(t) = 0, \qquad \deg q_j < m_j.$$

Σταθεροποιούμε έναν δείκτη j και εφαρμόζουμε και στα δύο μέλη τον τελεστή $\prod_{i\neq j}(D-r_i)^{m_i}$. Οι τελεστές αυτοί αντιμετατίθενται, επειδή είναι πολυώνυμα του ίδιου τελεστή D με σταθερούς συντελεστές. Κάθε όρος με δείκτη $i \neq j$ μηδενίζεται από τον παράγοντα $(D-r_i)^{m_i}$, όπως μόλις δείξαμε. Μένει

$$\mathrm{e}^{r_j t}\prod_{i\neq j}(D+r_j-r_i)^{m_i} q_j(t) = 0.$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε πάλι τον κανόνα γινομένου, στη μορφή $(D-r_i)(\mathrm{e}^{r_j t}q) = \mathrm{e}^{r_j t}(D+r_j-r_i)q$.

Αν $c \neq 0$ και το μη μηδενικό πολυώνυμο q έχει βαθμό d και συντελεστή $b \neq 0$ στον όρο t^d, τότε $(D+c)q = q' + cq$ έχει ίδιο βαθμό d και συντελεστή $cb \neq 0$ στον όρο t^d: η παράγωγος έχει μικρότερο βαθμό και δεν μπορεί να ακυρώσει τον όρο βαθμού d. Αυτό ισχύει και όταν $d = 0$, οπότε $q' = 0$. Επομένως κανένας από τους παράγοντες $D + r_j - r_i$, όπου $r_j - r_i \neq 0$, δεν μηδενίζει μη μηδενικό πολυώνυμο. Επειδή επίσης $\mathrm{e}^{r_j t} \neq 0$, η παραπάνω ταυτότητα επιβάλλει $q_j = 0$. Αυτό ισχύει για κάθε j, άρα όλοι οι συντελεστές της αρχικής σχέσης είναι μηδέν.

Οι πολλαπλότητες έχουν άθροισμα n, οπότε έχουμε n ανεξάρτητες μιγαδικές λύσεις. Η απόδειξη της Πρότασης 3.5 ισχύει και με μιγαδικές αρχικές τιμές: για πραγματικούς συντελεστές λύνουμε χωριστά για το πραγματικό και το φανταστικό μέρος. Άρα αυτές οι λύσεις αποτελούν βάση του μιγαδικού χώρου λύσεων.

Τέλος, για $r = \alpha + \mathrm{i}\beta$, ο τύπος Euler δίνει

$$\mathrm{e}^{rt} = \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t + \mathrm{i}\sin\beta t).$$

Οι πραγματικοί συντελεστές εξασφαλίζουν ότι και τα δύο μέρη είναι λύσεις. Για κάθε k, το πραγματικό ζεύγος προκύπτει από $u = t^k\mathrm{e}^{rt}$, $v = t^k\mathrm{e}^{\bar{r}t}$ ως $(u+v)/2$, $(u-v)/(2\mathrm{i})$. Η αλλαγή αντιστρέφεται: $u = (u+v)/2 + \mathrm{i}(u-v)/(2\mathrm{i})$, και αντίστοιχα για το v. Έτσι η αλλαγή των ζευγών διατηρεί την ανεξαρτησία. Παίρνουμε n πραγματικές ανεξάρτητες λύσεις, δηλαδή βάση του πραγματικού χώρου λύσεων. □

Παράδειγμα 3.13. Για $y'' + y' + y = 0$, οι ρίζες είναι $(-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3})/2$. Κάθε πραγματική λύση γράφεται

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t/2}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + C_2\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right).$$

Η γραφή $C_1\mathrm{e}^{r_1 t} + C_2\mathrm{e}^{r_2 t}$, με $r_2 = \overline{r_1}$, χρησιμοποιεί μιγαδικές εκθετικές και δίνει πραγματική λύση όταν $C_2 = \overline{C_1}$. Η παραπάνω μορφή με ημίτονο και συνημίτονο χρησιμοποιεί αυθαίρετους πραγματικούς συντελεστές.

Παράδειγμα 3.14. Η $(D-2)^3(D^2+1)y=0$ έχει γενική πραγματική λύση

$$y=(C_1+C_2t+C_3t^2)\mathrm{e}^{2t}+C_4\cos t+C_5\sin t.$$

3.3 Μη ομογενείς εξισώσεις

Πρόταση 3.15 (Αρχή της επαλληλίας)**.** *Αν η y_p είναι μία λύση της* (3.1)*, κάθε λύση γράφεται μοναδικά $y=y_p+y_h$, όπου $y_h\in\mathcal{S}_h$.*

Απόδειξη. Γράφουμε L για τον γραμμικό τελεστή στο αριστερό μέλος της (3.1). Αν y, y_p λύνουν τη μη ομογενή εξίσωση, τότε αφαιρώντας παίρνουμε $L(y-y_p)=g-g=0$, οπότε η διαφορά είναι ομογενής λύση. Αντίστροφα, για ομογενή y_h, $L(y_p+y_h)=Ly_p+Ly_h=g+0=g$. Αν $y_p+y_h=y_p+\widetilde{y}_h$, αφαιρώντας το y_p παίρνουμε $y_h=\widetilde{y}_h$. □

Για εξίσωση δεύτερης τάξης $y''+p(t)y'+q(t)y=g(t)$ και θεμελιώδες ζεύγος y_1, y_2, η *μεταβολή των σταθερών* δίνει

$$y_p(t)=-y_1(t)\int^t\frac{y_2(s)g(s)}{W(s)}\,ds+y_2(t)\int^t\frac{y_1(s)g(s)}{W(s)}\,ds. \tag{3.4}$$

Άλλη επιλογή κάτω ορίων αλλάζει μόνο το ομογενές μέρος. Για την απόδειξη δοκιμάζουμε $y_p=u_1(t)y_1(t)+u_2(t)y_2(t)$. Έχουμε δύο άγνωστες συναρτήσεις και μπορούμε να επιβάλουμε μία βολική επιπλέον συνθήκη:

$$u_1'y_1+u_2'y_2=0.$$

Έτσι οι όροι με u_1', u_2' απαλείφονται όταν παραγωγίσουμε μία φορά και $y_p'=u_1y_1'+u_2y_2'$. Παραγωγίζοντας δεύτερη φορά, αντικαθιστώντας στην εξίσωση και χρησιμοποιώντας ότι οι y_1, y_2 λύνουν την ομογενή, μένει $u_1'y_1'+u_2'y_2'=g$. Άρα

$$\begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1'\\ u_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ g\end{pmatrix}.$$

Με τον κανόνα Cramer, $u_1'=-y_2g/W$, $u_2'=y_1g/W$, και η ολοκλήρωση δίνει την (3.4).

Για σταθερούς συντελεστές και απλό δεξί μέλος, η μέθοδος *προσδιοριστέων συντελεστών* είναι ταχύτερη. Αν το δεξί μέλος είναι πραγματικό ή φανταστικό μέρος της $Q_m(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$, δοκιμάζουμε

$$y_p=t^sR_m(t)\mathrm{e}^{\lambda t}, \tag{3.5}$$

όπου το R_m είναι πολυώνυμο βαθμού m με άγνωστους μιγαδικούς συντελεστές και το s είναι η πολλαπλότητα της λ ως ρίζας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Στο τέλος παίρνουμε το κατάλληλο πραγματικό ή φανταστικό μέρος.

Παράδειγμα 3.16 (Πολυωνυμική διέγερση)**.** Για $y''-2y'+y=2t^2$, η δοκιμή $y_p=At^2+Bt+C$ δίνει $A=2$, $B=8$, $C=12$. Άρα

$$y=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{t}+2t^2+8t+12.$$

Παράδειγμα 3.17 (Συντονισμός)**.** Στην $y''-2y'+y=\mathrm{e}^{t}$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $(r-1)^2$. Η προφανής δοκιμή $A\mathrm{e}^{t}$ ανήκει ήδη στον ομογενή χώρο. Ο κανόνας (3.5) δίνει $At^2\mathrm{e}^{t}$, και η αντικατάσταση δίνει $A=1/2$.

Ο παράγοντας συντονισμού

Πολλαπλασιάζουμε τη συνηθισμένη δοκιμή με t^s, όπου s είναι *ολόκληρη* η πολλαπλότητα της χαρακτηριστικής ρίζας. Ένας μόνο παράγοντας t δεν αρκεί για πολλαπλή ρίζα.

Ασκήσεις

Άσκηση 3.1. *(Εφαρμογή του ορισμού)* Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας για να δείξετε ότι:

(i) οι $1, t, t^2$ είναι ανεξάρτητες στο $\mathbb{R}$ (παραγωγίστε δύο φορές μια υποθετική σχέση),

(ii) οι $1, \sin^2 t, \cos^2 t$ είναι εξαρτημένες στο $\mathbb{R}$,

(iii) οι t, t^2 είναι ανεξάρτητες, αλλά η ορίζουσα Wronski τους μηδενίζεται στο 0.

Γιατί το τελευταίο συμπέρασμα δεν αντιφάσκει με το Θεώρημα 3.9; Μπορούν οι t, t^2 να λύνουν την ίδια κανονικοποιημένη ομογενή γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης με συνεχείς συντελεστές σε διάστημα που περιέχει το 0;

Άσκηση 3.2. *(Μηδενική ορίζουσα χωρίς εξάρτηση)* Θέστε $f(t) = t^3$, $g(t) = |t|^3$.

(i) Υπολογίστε τις δύο πρώτες παραγώγους χωριστά για $t > 0$, $t < 0$, και από τον ορισμό στο 0. Δείξτε ότι $f, g \in C^2(\mathbb{R})$.

(ii) Δείξτε ότι $W(f, g) = 0$ παντού, αλλά οι f, g είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο $\mathbb{R}$.

(iii) Εξηγήστε, με το κριτήριο Wronski, γιατί δεν μπορούν να είναι λύσεις της ίδιας κανονικοποιημένης ομογενούς γραμμικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με συνεχείς συντελεστές σε όλο το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 3.3. *(Ορίζουσες Wronski)* Για $x > 0$ και πραγματικά a, b, c, m, υπολογίστε τις ορίζουσες Wronski των

$$x^a, x^b, x^c \quad \text{και} \quad x^m \sin(\log x),\ x^m \cos(\log x).$$

Προσδιορίστε ακριβώς πότε κάθε οικογένεια είναι γραμμικά ανεξάρτητη. Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 3.7 όταν η ορίζουσα δεν μηδενίζεται. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις της πρώτης οικογένειας βρείτε ρητά μια σχέση εξάρτησης μεταξύ των συναρτήσεων.

Άσκηση 3.4. *(Προσδιοριστέοι συντελεστές)* Βρείτε τη γενική πραγματική λύση και εντοπίστε κάθε συντονισμό:

(i) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = \mathrm{e}^{t} - t\mathrm{e}^{2t}$.

(ii) $y'' - 3y' + 2y = 14\sin 2t - 18\cos 2t$.

Άσκηση 3.5. *(Προβλήματα αρχικών τιμών)* Λύστε

(i) $y''' = y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$.

(ii) $y''' + y'' = t + \mathrm{e}^{-t}$, $y(0) = y''(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Άσκηση 3.6. Χωρίς να λύσετε την εξίσωση $(1+t^2)y'' + 2ty' + \mathrm{e}^t y = 0$, χρησιμοποιήστε την ταυτότητα Abel για να βρείτε την ορίζουσα Wronski ενός θεμελιώδους ζεύγους ως συνάρτηση της τιμής του στη στιγμή $t = 0$.

Άσκηση 3.7. Παραγάγετε την (3.4) και εφαρμόστε τη στην $t^2y'' - 2y = t^2$ για $t > 0$.

Άσκηση 3.8. Για πολυώνυμα P, Q, δείξτε απευθείας ότι $P(D)(\mathrm{e}^{\lambda t}Q(t)) = \mathrm{e}^{\lambda t}P(D+\lambda)Q(t)$. Με αυτό αποδείξτε τον κανόνα συντονισμού (3.5).

Άσκηση 3.9. Με γνωστή μία λύση, βρείτε δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη με αναγωγή τάξης:

(i) $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$, $y_1 = t$, $t > 0$.

(ii) $y'' - 2\tan(t)y' - y = 0$, $y_1 = 1/\cos t$, σε διάστημα όπου $\cos t \neq 0$.

Άσκηση 3.10. *(Αυξημένης δυσκολίας)* Έστω g συνεχής και T-περιοδική. Βρείτε αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε η $y'' + \omega^2 y = g(t)$ να έχει T-περιοδική λύση όταν $\omega T/(2\pi)$ είναι ακέραιος και όταν δεν είναι.

Κεφάλαιο 4

Γραμμικά συστήματα

4.1 Υπενθύμιση Γραμμικής Άλγεβρας

Ένας πίνακας $A = (a_{ij})$ ορίζει τη γραμμική απεικόνιση $\boldsymbol{y} \mapsto A\boldsymbol{y}$. Για την Ευκλείδεια νόρμα υπάρχει C_A ώστε

$$\|A\boldsymbol{y}\| \le C_A \|\boldsymbol{y}\| \qquad (\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n).$$

Μπορούμε, λόγου χάρη, να επιλέξουμε για C_A την τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων όλων των στοιχείων του A. Άρα ο πολλαπλασιασμός με πίνακα είναι πράξη Lipschitz.

Η ορίζουσα τετραγωνικού πίνακα δεν μηδενίζεται ακριβώς όταν οι στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητες· ισοδύναμα, όταν η $A\boldsymbol{c} = 0$ συνεπάγεται $\boldsymbol{c} = 0$. Οι στήλες ενός θεμελιώδους πίνακα είναι λύσεις τοποθετημένες δίπλα δίπλα. Η μη μηδενική ορίζουσα σημαίνει ότι καμία δεν είναι περιττός γραμμικός συνδυασμός.

Αν P είναι αντιστρέψιμος και $D = P^{-1}AP$, τότε $A = PDP^{-1}$. Η αντικατάσταση $\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ μετατρέπει την $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ σε $\boldsymbol{z}' = D\boldsymbol{z}$. Έτσι αξιοποιούμε διαγώνιους ή σχεδόν διαγώνιους πίνακες.

4.2 Θεμελιώδεις πίνακες

Έστω I διάστημα και $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b} : I \to \mathbb{R}^n$ συνεχείς. Το σύστημα

$$\boldsymbol{y}' = A(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t) \tag{4.1}$$

έχει μία και μόνο μία λύση σε όλο το I για κάθε αρχική τιμή: σε κάθε συμπαγές υποδιάστημα το δεξί μέλος έχει γραμμική αύξηση. Ο χώρος λύσεων της ομογενούς $\boldsymbol{y}' = A(t)\boldsymbol{y}$ έχει διάσταση n.

Γιατί η διάσταση είναι n. Για κάθε $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, το πρόβλημα $\boldsymbol{y}' = A(t)\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{c}$, έχει ακριβώς μία λύση. Έστω S ο χώρος όλων των ομογενών λύσεων. Η αποτίμηση

$$E : S \to \mathbb{R}^n, \qquad E(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}(t_0)$$

είναι γραμμική. Η ύπαρξη δείχνει ότι είναι επί: κάθε $\boldsymbol{c}$ εμφανίζεται ως αρχική τιμή. Η μοναδικότητα δείχνει ότι είναι ένα προς ένα: ίδιες αρχικές τιμές συνεπάγονται ίδιες λύσεις. Άρα $S \cong \mathbb{R}^n$ και $\dim S = n$. $\square$

Ο Ορισμός 3.2 εφαρμόζεται και σε διανυσματικές συναρτήσεις: οι $\boldsymbol{\phi}_1, \dots, \boldsymbol{\phi}_n : I \to \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες όταν η ταυτότητα $\sum_{j=1}^{n} c_j \boldsymbol{\phi}_j(t) = \mathbf{0}$ για κάθε $t \in I$, με *σταθερούς* συντελεστές, συνεπάγεται $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Για λύσεις του ίδιου συστήματος $\boldsymbol{y}' = A(t)\boldsymbol{y}$, αυτό ισοδυναμεί με τη γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων $\boldsymbol{\phi}_1(t_0), \dots, \boldsymbol{\phi}_n(t_0)$ σε μία στιγμή t_0. Πράγματι, μια σχέση μεταξύ των συναρτήσεων ισχύει και στη στιγμή t_0. Αντίστροφα, αν $\sum_j c_j \boldsymbol{\phi}_j(t_0) = \mathbf{0}$, ο συνδυασμός $\boldsymbol{u}(t) = \sum_j c_j \boldsymbol{\phi}_j(t)$ λύνει το ομογενές σύστημα με αρχική τιμή μηδέν. Η μηδενική συνάρτηση λύνει το ίδιο πρόβλημα, άρα η μοναδικότητα δίνει $\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{0}$ για κάθε $t \in I$.

Η *ορίζουσα Wronski* αυτών των διανυσματικών λύσεων είναι $W(t) = \det\big(\boldsymbol{\phi}_1(t), \dots, \boldsymbol{\phi}_n(t)\big)$. Εδώ οι στήλες είναι ήδη διανύσματα: δεν προσθέτουμε γραμμές παραγώγων όπως για βαθμωτές συναρτήσεις. Όταν $\boldsymbol{\phi}_j = (y_j, y_j', \dots, y_j^{(n-1)})^{T}$, ο ορισμός συμφωνεί με εκείνον του Κεφαλαίου 3. Από το προηγούμενο επιχείρημα, οι λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνο αν $W(t_0) \neq 0$.

Ορισμός 4.1. Μια λύση με τιμές στους πίνακες $\Phi : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ της $\Phi' = A(t)\Phi$ λέγεται *θεμελιώδης πίνακας* αν $\det \Phi(t_0) \neq 0$ σε κάποιο $t_0 \in I$. Οι στήλες της αποτελούν τότε βάση του ομογενούς χώρου λύσεων.

Θεώρημα 4.2 (Τύπος Liouville)**.** *Για οποιαδήποτε λύση πινάκων $\Phi' = A(t)\Phi$,*

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0) \exp\!\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds \right). \tag{4.2}$$

Άρα μια τέτοια λύση είναι είτε αντιστρέψιμη παντού είτε ιδιάζουσα παντού.

Απόδειξη. Έστω R_i η i-οστή γραμμή της Φ, $w = \det \Phi$, και $\mathcal{D}(v_1, \dots, v_n)$ η ορίζουσα με γραμμές $v_1, \dots, v_n$. Η πολυγραμμικότητα δίνει τον κανόνα παραγώγισης κατά γραμμές:

$$w' = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}(R_1, \dots, R_{i-1}, R_i', R_{i+1}, \dots, R_n).$$

Από την $\Phi' = A\Phi$, η i-οστή γραμμή ικανοποιεί $R_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} R_j$. Αντικαθιστώντας και χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα ως προς τη γραμμή στη θέση i, παίρνουμε

$$w' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \mathcal{D}(R_1, \dots, R_{i-1}, R_j, R_{i+1}, \dots, R_n).$$

Για $j \neq i$, η γραμμή R_j εμφανίζεται δύο φορές και η ορίζουσα μηδενίζεται. Για $j = i$, παίρνουμε την αρχική ορίζουσα w. Επομένως

$$w' = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} w = (\operatorname{tr} A) w,$$

όπου $\operatorname{tr} A = \sum_i a_{ii}$ είναι το ίχνος του πίνακα.

Θέτοντας $H(t) = \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds$, έχουμε

$$\frac{d}{dt}\big(\mathrm{e}^{-H(t)} w(t) \big) = \mathrm{e}^{-H(t)} \big(w'(t) - (\operatorname{tr} A(t)) w(t) \big) = 0.$$

Άρα $\mathrm{e}^{-H(t)} w(t) = w(t_0)$, που δίνει την (4.2). Δεν διαιρέσαμε με την ορίζουσα, οπότε ο τύπος ισχύει και όταν $w(t_0) = 0$. Επειδή ο εκθετικός παράγοντας είναι θετικός, η ορίζουσα είτε μηδενίζεται παντού είτε δεν μηδενίζεται πουθενά. $\square$

Παρατήρηση 4.3 (Η σύνδεση με την ταυτότητα Abel)**.** Η ομογενής εξίσωση τάξης n,

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = 0,$$

γράφεται ως σύστημα πρώτης τάξης αν θέσουμε $\boldsymbol{x} = (y, y', \dots, y^{(n-1)})^T$. Ο πίνακας του συστήματος $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ έχει, για $n \geq 2$, τα στοιχεία

$$A_{i,i+1}(t) = 1 \quad (1 \leq i < n), \qquad A_{n,j}(t) = -a_{n+1-j}(t) \quad (1 \leq j \leq n),$$

και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι μηδέν. Δηλαδή έχει μονάδες ακριβώς πάνω από την κύρια διαγώνιο και τελευταία γραμμή $(-a_n, \dots, -a_1)$. Για παράδειγμα, όταν $n = 3$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3(t) & -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix}.$$

Όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι μηδέν, εκτός από το τελευταίο, που είναι $-a_1(t)$. Επομένως $\operatorname{tr} A(t) = -a_1(t)$. Για $n = 1$, ο πίνακας είναι απλώς $A(t) = (-a_1(t))$ και η ίδια ταυτότητα ισχύει.

Αν $y_1, \dots, y_n$ είναι λύσεις της βαθμωτής εξίσωσης, τοποθετούμε τα αντίστοιχα διανύσματα $\boldsymbol{x}_j$ ως στήλες:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Τότε $\Phi' = A\Phi$ και $\det \Phi = W(y_1, \dots, y_n)$. Αντικαθιστώντας αυτά τα δύο στοιχεία στον τύπο του Θεωρήματος 4.2, παίρνουμε

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\, ds \right),$$

δηλαδή ακριβώς τον τύπο του Θεωρήματος 3.11. Η ταυτότητα Abel είναι λοιπόν η μορφή του τύπου Liouville για το συνοδό σύστημα μιας βαθμωτής εξίσωσης ανώτερης τάξης.

Ορισμός 4.4. Ο *πίνακας μετάβασης καταστάσεων* είναι

$$U(t, s) = \Phi(t)\Phi(s)^{-1}.$$

Δεν εξαρτάται από την επιλογή θεμελιώδους πίνακα, και

$$U(t,t) = I, \qquad U(t,r)U(r,s) = U(t,s), \qquad U(t,s)^{-1} = U(s,t).$$

Θεώρημα 4.5 (Μεταβολή των σταθερών)**.** *Η λύση της* (4.1) *με* $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0$ *είναι*

$$\boldsymbol{y}(t) = U(t, t_0)\boldsymbol{y}_0 + \int_{t_0}^{t} U(t, s)\boldsymbol{b}(s)\, ds. \tag{4.3}$$

Απόδειξη. Έστω Φ θεμελιώδης πίνακας. Αναζητούμε τη λύση ως $\boldsymbol{y}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{c}(t)$: επιτρέπουμε, δηλαδή, στους συντελεστές του συνδυασμού ομογενών λύσεων να εξαρτώνται από τον χρόνο. Παραγωγίζοντας,

$$\boldsymbol{y}' = \Phi'\boldsymbol{c} + \Phi\boldsymbol{c}' = A\Phi\boldsymbol{c} + \Phi\boldsymbol{c}' = A\boldsymbol{y} + \Phi\boldsymbol{c}'.$$

Για να ισχύει $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}$, χρειαζόμαστε $\Phi(t)\boldsymbol{c}'(t) = \boldsymbol{b}(t)$. Η $\Phi(t)$ είναι αντιστρέψιμη, άρα $\boldsymbol{c}'(t) = \Phi(t)^{-1}\boldsymbol{b}(t)$. Ολοκληρώνουμε:

$$\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{c}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}\boldsymbol{b}(s)\,ds.$$

Από $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0$ έχουμε $\boldsymbol{c}(t_0) = \Phi(t_0)^{-1}\boldsymbol{y}_0$. Πολλαπλασιάζοντας με $\Phi(t)$ και βάζοντας $U(t,s) = \Phi(t)\Phi(s)^{-1}$, παίρνουμε ακριβώς την (4.3). □

4.3 Η εκθετική συνάρτηση πίνακα

Για σταθερό πίνακα A, ορίζουμε

$$\mathrm{e}^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}. \tag{4.4}$$

Η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε t, ομοιόμορφα σε συμπαγή διαστήματα. Παραγωγίζοντας κατά όρους βρίσκουμε

$$\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{tA} = A\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA}A, \qquad \mathrm{e}^{0A} = I.$$

Άρα η e^{tA} είναι θεμελιώδης πίνακας με τιμή I στο μηδέν, και $U(t,s) = \mathrm{e}^{(t-s)A}$.

Για να δικαιολογήσουμε τη σύγκλιση, επιλέγουμε νόρμα πινάκων με $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$. Τότε

$$\left\| \frac{t^k A^k}{k!} \right\| \le \frac{(|t|\,\|A\|)^k}{k!}.$$

Το άθροισμα των δεξιών μελών είναι η συγκλίνουσα βαθμωτή σειρά $\mathrm{e}^{|t|\|A\|}$. Αν $|t| \le T$, χρησιμοποιούμε για όλα τα t την ίδια συγκλίνουσα σειρά $\sum_{k\ge 0}(T\,\|A\|)^k/k!$. Η ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς και της σειράς παραγώγων δικαιολογεί την παραγώγιση κατά όρους, όπως στις δυναμοσειρές του Λογισμού.

Πρόταση 4.6 (Βασικές ταυτότητες)**.** *Για σταθερό A,*

$$\mathrm{e}^{(t+s)A} = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{sA}, \qquad (\mathrm{e}^{tA})^{-1} = \mathrm{e}^{-tA}, \qquad \det(\mathrm{e}^{tA}) = \mathrm{e}^{t\,\mathrm{tr}\,A}.$$

Αν $AB = BA$, ισχύει $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}$. Χωρίς αντιμεταθετικότητα, αυτή η τελευταία ταυτότητα μπορεί να αποτύχει.

Παράδειγμα 4.7 (Μη αντιμεταθετικοί μηδενοδύναμοι πίνακες)**.** Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επειδή $A^2 = B^2 = 0$, έχουμε $\mathrm{e}^{A} = I + A$, $\mathrm{e}^{B} = I + B$, αλλά $AB \neq BA$ και $\mathrm{e}^{A+B} \neq \mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}$.

Αν $A = PDP^{-1}$, τότε

$$\mathrm{e}^{tA} = P\mathrm{e}^{tD}P^{-1}. \tag{4.5}$$

Αν $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, τότε $\mathrm{e}^{tD} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_n t})$.

Παράδειγμα 4.8 (Διαγωνιοποιήσιμο σύστημα)**.** Για $A = \left(\begin{smallmatrix} -11 & 16 \\ -8 & 13 \end{smallmatrix}\right)$, τα ιδιοζεύγη είναι $\lambda_1 = -3, \boldsymbol{v}_1 = (2,1)^T$ και $\lambda_2 = 5, \boldsymbol{v}_2 = (1,1)^T$. Άρα

$$\boldsymbol{y}(t) = C_1\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Η ευθεία $\mathrm{span}\{(2,1)^T\}$ είναι ακριβώς το σύνολο αρχικών δεδομένων των οποίων οι λύσεις τείνουν στο μηδέν.

4.4 Μιγαδικά και γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

Αν ο πραγματικός A έχει ιδιοζεύγος $A(\boldsymbol{p}+\mathrm{i}\boldsymbol{q}) = (\alpha+\mathrm{i}\beta)(\boldsymbol{p}+\mathrm{i}\boldsymbol{q})$, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της $\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}(\boldsymbol{p}+\mathrm{i}\boldsymbol{q})$ είναι λύσεις:

$$\boldsymbol{y}_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(\boldsymbol{p}\cos\beta t - \boldsymbol{q}\sin\beta t), \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{y}_2(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(\boldsymbol{p}\sin\beta t + \boldsymbol{q}\cos\beta t). \tag{4.7}$$

Παράδειγμα 4.9. Για $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$,

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix}.$$

Για $a<0$ έχουμε σπείρα προς το κέντρο, για $a>0$ σπείρα προς τα έξω, ενώ για $a=0$ ομόκεντρους κύκλους.

Η διαγωνιοποίηση μπορεί να αποτύχει για πολλαπλή ιδιοτιμή.

Ορισμός 4.10. *Αλυσίδα Jordan* μήκους m για την λ είναι σταθερά διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_m$, με $\boldsymbol{v}_1\neq 0$, τέτοια ώστε

$$(A-\lambda I)\boldsymbol{v}_1 = 0, \qquad (A-\lambda I)\boldsymbol{v}_{k+1} = \boldsymbol{v}_k \quad (1\le k<m).$$

Η αλυσίδα παράγει τις λύσεις

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_1 &= \mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{v}_1,\\
\boldsymbol{y}_2 &= \mathrm{e}^{\lambda t}(t\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2),\\
\boldsymbol{y}_3 &= \mathrm{e}^{\lambda t}(\tfrac{t^2}{2}\boldsymbol{v}_1+t\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3), \quad \dots
\end{aligned}$$

Ελέγχουμε ότι αυτές οι διανυσματικές συναρτήσεις λύνουν την $\boldsymbol{y}'=A\boldsymbol{y}$. Από τις σχέσεις της αλυσίδας έχουμε $A\boldsymbol{v}_1=\lambda\boldsymbol{v}_1$ και $A\boldsymbol{v}_j=\lambda\boldsymbol{v}_j+\boldsymbol{v}_{j-1}$ για $j\ge 2$. Επομένως

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_1' &= \lambda\mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{v}_1 = A\boldsymbol{y}_1,\\
\boldsymbol{y}_2' &= \lambda\boldsymbol{y}_2 + \mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{v}_1 = A\boldsymbol{y}_2,\\
\boldsymbol{y}_3' &= \lambda\boldsymbol{y}_3 + \mathrm{e}^{\lambda t}(t\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2) = A\boldsymbol{y}_3.
\end{aligned}$$

Γενικά, για $1\le k\le m$, θέτουμε

$$\boldsymbol{y}_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\sum_{r=0}^{k-1}\frac{t^r}{r!}\boldsymbol{v}_{k-r}.$$

Η παράγωγος του πολυωνυμικού αθροίσματος είναι $\sum_{r=0}^{k-2} t^r\boldsymbol{v}_{k-1-r}/r!$, που ισούται με $(A-\lambda I)\sum_{r=0}^{k-1} t^r\boldsymbol{v}_{k-r}/r!$. Άρα $\boldsymbol{y}_k' = \lambda\boldsymbol{y}_k + (A-\lambda I)\boldsymbol{y}_k = A\boldsymbol{y}_k$. Για $k=1$, το άθροισμα της παραγώγου είναι κενό και θεωρείται μηδέν.

Οι λύσεις $\boldsymbol{y}_1,\dots,\boldsymbol{y}_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Πράγματι, αν $\sum_{j=1}^m c_j\boldsymbol{y}_j(t)=\boldsymbol{0}$ για κάθε t, στη στιγμή $t=0$ έχουμε $\sum_{j=1}^m c_j\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{0}$. Οι σχέσεις της αλυσίδας δίνουν $(A-\lambda I)^{j-1}\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{v}_1$ και $(A-\lambda I)^j\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{0}$. Εφαρμόζοντας λοιπόν $(A-\lambda I)^{m-1}$ στη γραμμική σχέση, όλοι οι όροι με $j<m$ μηδενίζονται και παίρνουμε $c_m\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{0}$, άρα $c_m=0$, αφού $\boldsymbol{v}_1\neq\boldsymbol{0}$. Αν $m\ge 2$, στη σχέση που απομένει εφαρμόζουμε $(A-\lambda I)^{m-2}$ και βρίσκουμε $c_{m-1}=0$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε σε $c_m=\cdots=c_1=0$.

Ισοδύναμα, για μπλοκ Jordan $J=\lambda I+N$ με $N^m=0$,

$$\mathrm{e}^{tJ} = \mathrm{e}^{\lambda t}\left(I + tN + \frac{t^2N^2}{2!} + \cdots + \frac{t^{m-1}N^{m-1}}{(m-1)!}\right). \tag{4.8}$$

Παράδειγμα 4.11. Για $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$,

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο παράγοντας t αποτυπώνει την απουσία δεύτερου ιδιοδιανύσματος. Ο πίνακας $\mathrm{e}^{t} I$ δεν δίνει τις περισσότερες λύσεις.

Το επόμενο θεώρημα μετατρέπει την πληροφορία για τις ιδιοτιμές σε ένα κοινό εκθετικό φράγμα για τις λύσεις. Θα χρησιμοποιηθεί στο Κεφάλαιο 6, στην απόδειξη της ευσταθούς περίπτωσης του Θεωρήματος 6.7 (έμμεση μέθοδος Lyapunov), για να ελέγξουμε την επίδραση των μη γραμμικών όρων. Στο Κεφάλαιο 7, στο Θεώρημα 7.7, το ίδιο φράγμα θα εξασφαλίσει τη σύγκλιση του ολοκληρώματος που ορίζει τον πίνακα P και θα χρησιμοποιηθεί για τη μοναδικότητά του.

Θεώρημα 4.12 (Εκθετική απόσβεση)**.** *Αν όλες οι ιδιοτιμές του A έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, υπάρχουν $M \geq 1$, $\gamma > 0$ ώστε*

$$\left\| \mathrm{e}^{tA} \right\| \leq M \mathrm{e}^{-\gamma t} \qquad (t \geq 0).$$

Αντίστροφα, μια τέτοια εκτίμηση συνεπάγεται ότι όλες οι ιδιοτιμές έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

Απόδειξη. Στη μορφή Jordan, κάθε όρος είναι πολυώνυμο του t επί $\mathrm{e}^{\lambda t}$. Αν $\operatorname{Re}\lambda < 0$, επιλέγουμε $0 < \gamma < -\operatorname{Re}\lambda$ για όλες τις ιδιοτιμές: τότε $t^{k}\mathrm{e}^{(\operatorname{Re}\lambda + \gamma)t}$ είναι φραγμένη για $t \geq 0$, αφού η εκθετική με αρνητικό εκθέτη υπερισχύει του πολυωνύμου. Η αλλαγή βάσης επηρεάζει μόνο τη σταθερά M. Αντίστροφα, εφαρμόζουμε την εκτίμηση σε μιγαδικό ιδιοδιάνυσμα και παίρνουμε $\mathrm{e}^{t\operatorname{Re}\lambda} \leq M\mathrm{e}^{-\gamma t}$. Αφήνοντας $t \to \infty$, είναι απαραίτητο $\operatorname{Re}\lambda \leq -\gamma < 0$. □

4.5 Μη ομογενή συστήματα με σταθερούς συντελεστές

Ο τύπος (4.3) εδώ γίνεται

$$\boldsymbol{y}(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}\boldsymbol{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t-s)A}\boldsymbol{b}(s)\,ds. \tag{4.9}$$

Παράδειγμα 4.13. Λύνουμε

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Τα ιδιοδιανύσματα για $1, -1$ είναι, αντίστοιχα, $(-2,1)^{T}$ και $(0,1)^{T}$. Προσαρμόζοντας τις αρχικές τιμές,

$$\boldsymbol{y}(t) = -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} \\ -\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}) \end{pmatrix}.$$

Η άμεση αντικατάσταση είναι χρήσιμος τελικός έλεγχος.

Παράδειγμα 4.14 (Φραγμένη απόκριση σε εξωτερική διέγερση)**.** Αν όλες οι ιδιοτιμές του A έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος και $\|\boldsymbol{b}(t)\| \le B$ για $t \ge 0$, τότε από το Θεώρημα 4.12 και την (4.9),

$$\|\boldsymbol{y}(t)\| \le M\mathrm{e}^{-\gamma t}\,\|\boldsymbol{y}_0\| + MB\int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-s)}ds \le M\,\|\boldsymbol{y}_0\| + \frac{MB}{\gamma}.$$

Άρα κάθε λύση προς τα εμπρός είναι φραγμένη.

Ασκήσεις

Άσκηση 4.1. *(Θεμελιώδης πίνακας και αρχική τιμή)* Για το σύστημα $\boldsymbol{y}' = A(t)\boldsymbol{y}$, όπου

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \Phi(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t^2/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix},$$

ελέγξτε ότι $\Phi' = A\Phi$ και ότι $\det\Phi(t) \neq 0$. Συγκρίνετε την ορίζουσα με τον τύπο Liouville. Γράψτε τη γενική λύση ως $\boldsymbol{y}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{c}$ και βρείτε τη λύση με $\boldsymbol{y}(1) = (2,-1)^T$.

Άσκηση 4.2. *(Διαφορετικοί θεμελιώδεις πίνακες)* Έστω Φ θεμελιώδης πίνακας της $\boldsymbol{y}' = A(t)\boldsymbol{y}$ σε διάστημα I, και C σταθερός αντιστρέψιμος πίνακας. Δείξτε ότι ο $\Psi(t) = \Phi(t)C$ είναι επίσης θεμελιώδης και ότι

$$\Psi(t)\Psi(s)^{-1} = \Phi(t)\Phi(s)^{-1}.$$

Αντίστροφα, αν Ψ είναι άλλος θεμελιώδης πίνακας, θέστε $C = \Phi(t_0)^{-1}\Psi(t_0)$. Χρησιμοποιήστε τη μοναδικότητα για κάθε στήλη ώστε να αποδείξετε ότι $\Psi(t) = \Phi(t)C$ για κάθε $t \in I$. Γιατί ο C είναι αντιστρέψιμος;

Άσκηση 4.3. *(Υπολογισμός και χρήση του $U(t,s)$)* Για

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ελέγξτε ότι η Φ είναι θεμελιώδης πίνακας και υπολογίστε $U(t,s) = \Phi(t)\Phi(s)^{-1}$. Με τον τύπο $\boldsymbol{y}(t) = U(t,2)\boldsymbol{y}(2)$, λύστε το $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ με $\boldsymbol{y}(2) = (1,-1)^T$. Έπειτα χρησιμοποιήστε τη μεταβολή των σταθερών για να λύσετε

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{0}.$$

Ελέγξτε τις δύο απαντήσεις με αντικατάσταση στις εξισώσεις.

Άσκηση 4.4. Για $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, βρείτε e^{tA}, e^{tB}, $\mathrm{e}^{t(A+B)}$. Ελέγξτε ότι $\mathrm{e}^{t(A+B)} \neq \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB}$ γενικά και συνδέστε το με τον $AB - BA$.

Άσκηση 4.5. Βρείτε πραγματικό θεμελιώδες σύνολο λύσεων και την ορίζουσα Wronski για $\boldsymbol{y}' = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{y}$. Οι ιδιοτιμές είναι $2, \pm 2\mathrm{i}$. Ελέγξτε με τον τύπο Liouville.

Άσκηση 4.6. Γράψτε σε μορφή πίνακα και λύστε το σύστημα $y_1' = y_1 - 2y_3$, $y_2' = y_2$, $y_3' = y_1 - y_2 - y_3$.

Άσκηση 4.7. Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών του τελευταίου υπολογισμένου ομογενούς παραδείγματος μέσω του ελαχίστου πολυωνύμου του A. Συγκρίνετε τις δύο λύσεις.

Άσκηση 4.8. *(Φασικά πορτρέτα γραμμικών συστημάτων)* Βρείτε e^{tA}, αναλλοίωτες ευθείες, τύπο ευστάθειας της αρχής και φασικό πορτρέτο για

$$(a)\quad A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad (b)\ A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -4 & -3\end{pmatrix},$$
$$(c)\quad A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Άσκηση 4.9. Αν $A^2=0$, δείξτε $\mathrm{e}^{tA}=I+tA$. Γενικότερα, αν $(A-\lambda I)^m=0$, γράψτε την e^{tA} ως $\mathrm{e}^{\lambda t}$ επί ρητό πολυώνυμο του t με συντελεστές πίνακες.

Άσκηση 4.10. *(Συντονισμός σε σύστημα)* Βρείτε τη γενική λύση της

$$\boldsymbol{y}'=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}+\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Γιατί εμφανίζονται πολυωνυμικοί παράγοντες του t τόσο στην ομογενή όσο και σε μια μερική λύση;

Άσκηση 4.11. *(Αυξημένης δυσκολίας)* Η $A(t)$ είναι συνεχής και T-περιοδική· θέτουμε $M=U(T,0)$. Αν και η $\boldsymbol{b}(t)$ είναι T-περιοδική, αποδείξτε ότι η $\boldsymbol{y}'=A(t)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}(t)$ έχει μοναδική T-περιοδική λύση εφόσον το 1 δεν είναι ιδιοτιμή του M.

Κεφάλαιο 5

Αυτόνομες βαθμωτές εξισώσεις και διακλαδώσεις

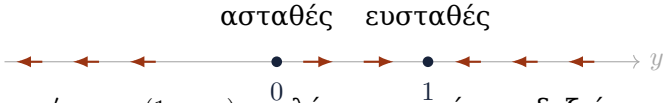
5.1 Γραμμές φάσης και σημεία ισορροπίας

Μια αυτόνομη βαθμωτή εξίσωση έχει τη μορφή

$$y' = f(y). \tag{5.1}$$

Σε όλο το κεφάλαιο υποθέτουμε ότι η f είναι τοπικά Lipschitz, ώστε να ισχύει μοναδικότητα λύσεων.

Ορισμός 5.1. Ένα $\bar{y}$ είναι *σημείο ισορροπίας* αν $f(\bar{y}) = 0$. Η αντίστοιχη σταθερή λύση είναι $y(t) \equiv \bar{y}$. Τα βέλη, ανάλογα με το πρόσημο της f στα διαστήματα ανάμεσα στα σημεία ισορροπίας, σχηματίζουν τη *γραμμή φάσης*.



Για $y' = y(1-y)$, οι λύσεις κινούνται δεξιά για $0 < y < 1$ και αριστερά για $y > 1$. Η γραμμή φάσης προβλέπει έλξη προς το 1 χωρίς επίλυση της εξίσωσης.

Σχήμα 5.1: Γραμμή φάσης της λογιστικής εξίσωσης $y' = y(1-y)$.

Η μοναδικότητα συνεπάγεται ότι μια μη σταθερή λύση δεν μπορεί να διασχίσει σημείο ισορροπίας. Σε διάστημα χωρίς μηδενισμό της f, κάθε λύση είναι γνησίως μονότονη.

Λήμμα 5.2 (Όριο φραγμένης τροχιάς)**.** *Αν μια λύση της* (5.1) *είναι φραγμένη για $t \geq 0$, τότε έχει όριο καθώς $t \to \infty$, το οποίο είναι σημείο ισορροπίας.*

Απόδειξη. Εκτός αν είναι σταθερή, η λύση παραμένει σε μία συνιστώσα του $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(0)$, όπου η παράγωγός της έχει σταθερό πρόσημο. Είναι λοιπόν φραγμένη και μονότονη και συγκλίνει σε ℓ. Αν $f(\ell) \neq 0$, η συνέχεια της f θα έδινε $|y'|$ φραγμένο μακριά από το μηδέν για όλα τα αρκετά μεγάλα t, πράγμα ασύμβατο με τη σύγκλιση της $y(t)$. □

Παράδειγμα 5.3 (Λογιστική εξίσωση)**.** Η $y' = y(1-y)$ έχει ισορροπίες $0, 1$ και διάγραμμα προσήμων

$$\longleftarrow \quad 0 \quad \longrightarrow \quad 1 \quad \longleftarrow .$$

Αρχικές τιμές στο $(0,1)$ αυξάνονται προς το 1, πάνω από το 1 μειώνονται προς αυτό, ενώ οι αρνητικές λύσεις κινούνται αριστερά και εκρήγνυνται προς το $-\infty$ σε πεπερασμένο χρόνο. Άρα το 1 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και το 0 ασταθές. Η ρητή λύση

$$y(t) = \frac{y_0 \mathrm{e}^t}{1 + y_0(\mathrm{e}^t - 1)}$$

επιβεβαιώνει τη γραμμή φάσης και εμφανίζει τον πόλο όταν $y_0 < 0$.

Παράδειγμα 5.4. Για $y' = \sin y$, όλα τα $k\pi$ είναι ισορροπίες. Τα $(2k+1)\pi$ έλκουν από τις δύο πλευρές, ενώ τα $2k\pi$ απωθούν. Η γραμμή φάσης το αποκαλύπτει χωρίς να λύσουμε την εξίσωση.

5.2 Ευστάθεια

Γράφουμε $\phi(t; y_0)$ για τη λύση με $\phi(0; y_0) = y_0$.

Ορισμός 5.5. Ένα σημείο ισορροπίας $\bar{y}$ λέγεται

- *ευσταθές* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|y_0 - \bar{y}| < \delta$ να συνεπάγεται $|\phi(t; y_0) - \bar{y}| < \varepsilon$ για όλα τα $t \geq 0$,
- *ελκτικό* αν οι λύσεις από κάποια περιοχή του τείνουν σε αυτό καθώς $t \to \infty$,
- *ασυμπτωτικά ευσταθές* αν είναι ευσταθές και ελκτικό,
- *ασταθές* αν δεν είναι ευσταθές.

Η ελκτικότητα μόνη της δεν συνεπάγεται πάντοτε ευστάθεια σε μεγαλύτερες διαστάσεις· γι' αυτό δηλώνονται χωριστά.

Πρόταση 5.6 (Κριτήριο προσήμου)**.** *Έστω $f(\bar{y}) = 0$.*

(α′) Αν $(y - \bar{y})f(y) < 0$ για όλα τα αρκετά κοντινά $y \neq \bar{y}$, το $\bar{y}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

(β′) Αν $(y - \bar{y})f(y) > 0$ εκεί, το $\bar{y}$ είναι ασταθές.

(γ′) Αν γνωρίζουμε το πρόσημο μόνο στη μία πλευρά, παίρνουμε μονόπλευρη έλξη ή άπωση· η ισορροπία μπορεί να είναι ημιευσταθής.

Απόδειξη. Επιλέγουμε $\eta > 0$ ώστε η αντίστοιχη ανισότητα να ισχύει στο $(\bar{y}-\eta, \bar{y}+\eta)$, εκτός από το $\bar{y}$. Στο (a), για $y > \bar{y}$ έχουμε $y - \bar{y} > 0$, άρα $f(y) < 0$ και οι λύσεις κινούνται αριστερά. Για $y < \bar{y}$, έχουμε $f(y) > 0$, άρα κινούνται δεξιά. Τα βέλη δείχνουν προς την ισορροπία και από τις δύο πλευρές.

Για την ευστάθεια, παίρνουμε $0 < \varepsilon < \eta$ και $\delta = \varepsilon$. Αν η αρχική τιμή βρίσκεται στο $(\bar{y} - \varepsilon, \bar{y} + \varepsilon)$, η λύση δεν μπορεί να διασχίσει το αριστερό άκρο, όπου το πεδίο δείχνει δεξιά, ούτε το δεξί άκρο, όπου δείχνει αριστερά. Μένει εκεί για κάθε θετικό χρόνο. Για την ελκτικότητα, μια λύση στα δεξιά είναι φθίνουσα όσο μένει εκεί, ενώ μία στα αριστερά είναι αύξουσα. Είναι φραγμένη και μονότονη, άρα έχει όριο. Από το Λήμμα 5.2, το όριο είναι ισορροπία· επιλέγοντας μικρότερο διάστημα όπου μοναδική ισορροπία είναι η $\bar{y}$, το όριο είναι $\bar{y}$.

Στο (b), τα βέλη δείχνουν μακριά από την ισορροπία. Ξεκινώντας όσο κοντά θέλουμε στη μία πλευρά, η λύση τελικά εγκαταλείπει ένα σταθερό μικρό διάστημα γύρω της. Αυτό παραβιάζει τον ορισμό ευστάθειας. Το (c) αποδεικνύεται με την ίδια ιδέα στη μία πλευρά. □

Παράδειγμα 5.7 (Ημιευσταθής ισορροπία)**.** Για $y' = (y-\bar{y})^2$, η $\bar{y}$ έλκει από αριστερά και απωθεί από δεξιά. Δεν είναι ευσταθής. Ο όρος «ημιευσταθής» καταγράφει τη μονόπλευρη συμπεριφορά, χωρίς να ισχυρίζεται ευστάθεια με την έννοια του Ορισμού 5.5.

Θεώρημα 5.8 (Γραμμικοποίηση στη μία διάσταση)**.** *Αν $f \in C^1$ και $f(\bar{y}) = 0$, τότε:*

(α′) $f'(\bar{y}) < 0$ *συνεπάγεται ασυμπτωτική ευστάθεια,*

(β′) $f'(\bar{y}) > 0$ *συνεπάγεται αστάθεια,*

(γ′) $f'(\bar{y}) = 0$ *δεν δίνει συμπέρασμα.*

Απόδειξη. Από τον τύπο Taylor και το $f(\bar{y}) = 0$,

$$f(y) = f'(\bar{y})(y-\bar{y}) + r(y), \qquad \frac{|r(y)|}{|y-\bar{y}|} \to 0 \quad (y \to \bar{y}).$$

Αν $f'(\bar{y}) < 0$, επιλέγουμε $\eta > 0$ ώστε

$$|r(y)| \le \frac{|f'(\bar{y})|}{2}\,|y-\bar{y}| \quad \text{για } 0 < |y-\bar{y}| < \eta.$$

Ο κύριος γραμμικός όρος υπερισχύει του υπολοίπου, άρα η $f(y)$ έχει πρόσημο αντίθετο από το $y-\bar{y}$, δηλαδή $(y-\bar{y})f(y) < 0$. Η Πρόταση 5.6 δίνει ασυμπτωτική ευστάθεια. Αν $f'(\bar{y}) > 0$, η ίδια εκτίμηση δίνει ίδιο πρόσημο για $f(y)$ και $y-\bar{y}$, άρα αστάθεια. Αν $f'(\bar{y}) = 0$, το πρώτο μη μηδενικό μη γραμμικό μέρος καθορίζει τη συμπεριφορά· τα παραδείγματα που ακολουθούν δείχνουν ότι κάθε ένα από τα προηγούμενα συμπεράσματα μπορεί να αποτύχει. □

Προσοχή

Η μηδενική παράγωγος δεν παρέχει πληροφορία ευστάθειας: στο μηδέν, η $y' = -y^3$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, η $y' = y^3$ ασταθής, και η $y' = 0$ ευσταθής αλλά όχι ελκτική. Όλες έχουν την ίδια γραμμικοποίηση $y' = 0$.

Ένα ευσταθές σημείο μπορεί ακόμη να μην είναι μεμονωμένο: ένα λείο πεδίο με μηδενικά που συσσωρεύονται στο μηδέν παγιδεύει κοντινές τροχιές ανάμεσα σε διαδοχικές ισορροπίες. Τότε το μηδέν μπορεί να είναι ευσταθές χωρίς να είναι ελκτικό.

5.3 Ροή πάνω στην ευθεία

Η χρονική μετατόπιση λύσης αυτόνομης εξίσωσης είναι πάλι λύση. Όποτε οι όροι ορίζονται, η μοναδικότητα δίνει

$$\phi(0;y) = y, \qquad \phi(t+s;y) = \phi(t;\phi(s;y)), \qquad \phi(-t;\cdot) = \phi(t;\cdot)^{-1}. \tag{5.2}$$

Αν όλες οι λύσεις είναι ολικές, οι απεικονίσεις $\phi_t(y) = \phi(t;y)$ σχηματίζουν μονοπαραμετρική ομάδα ομοιομορφισμών της $\mathbb{R}$, τη *ροή*. Αν $f \in C^1$, η ροή είναι συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς την αρχική τιμή και

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_0}(t;y_0) = \exp\!\left(\int_0^t f'(\phi(s;y_0))\,ds\right) > 0. \tag{5.3}$$

Άρα κάθε χρονική απεικόνιση διατηρεί τη διάταξη.

5.4 Μονοπαραμετρικές οικογένειες και διακλαδώσεις

Θεωρούμε

$$y' = f(y, \mu), \qquad \mu \in \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

Ορισμός 5.9. Η μ_* είναι *τιμή διακλάδωσης* αν το τοπικό διάγραμμα ισορροπιών, μαζί με την ευστάθειά τους, αλλάζει ποιοτικά όταν η μ περνά από τη μ_*. Ένα *διάγραμμα διακλάδωσης* σχεδιάζει τους κλάδους ισορροπίας στο επίπεδο (μ, y), συνήθως με συνεχείς γραμμές για τους ευσταθείς και διακεκομμένες για τους ασταθείς.

Η σχέση $f(y_*, \mu_*) = 0$ δηλώνει μόνο την ύπαρξη ισορροπίας. Μια τυπική τοπική διακλάδωση απαιτεί απώλεια υπερβολικότητας:

$$f(y_*, \mu_*) = 0, \qquad f_y(y_*, \mu_*) = 0. \tag{5.5}$$

Παράδειγμα 5.10 (Διακλάδωση σάγματος--κόμβου)**.** Στην $y' = \mu + y^2$, για $\mu < 0$ υπάρχουν δύο ισορροπίες, για $\mu = 0$ μία διπλή, και για $\mu > 0$ καμία. Ο κλάδος $y = -\sqrt{-\mu}$ είναι ευσταθής και ο $y = \sqrt{-\mu}$ ασταθής. Αυτή είναι η κανονική μορφή της διακλάδωσης σάγματος--κόμβου.

Παράδειγμα 5.11 (Μετακρίσιμη διακλάδωση)**.** Στην $y' = \mu y - y^2 = y(\mu - y)$, οι κλάδοι $y = 0$, $y = \mu$ τέμνονται στο μηδέν και ανταλλάσσουν ευστάθεια.

Παράδειγμα 5.12 (Υπερκρίσιμη διχάλα)**.** Στην $y' = \mu y - y^3$, για $\mu < 0$ μοναδική ισορροπία είναι η ασυμπτωτικά ευσταθής αρχή. Για $\mu = 0$ παραμένει ασυμπτωτικά ευσταθής αλλά παύει να είναι υπερβολική. Για $\mu > 0$ η αρχή είναι ασταθής και εμφανίζονται οι ευσταθείς ισορροπίες $y = \pm\sqrt{\mu}$.

Παρατήρηση 5.13. Στην $y' = y - \mu$, η ισορροπία $y = \mu$ μετακινείται με την παράμετρο, όμως η ευστάθεια και η τοπική εικόνα δεν αλλάζουν. Δεν υπάρχει διακλάδωση.

Παράδειγμα 5.14 (Κυβική εξίσωση με δύο πτυχές)**.** Για $f(y, \mu) = \mu + y - y^3$, οι συνθήκες $f = f_y = 0$ δίνουν $y = \pm 1/\sqrt{3}$, $\mu = \mp 2/(3\sqrt{3})$. Μεταξύ αυτών των τιμών η κυβική έχει τρεις ισορροπίες· έξω από αυτές μία. Σε κάθε ακραία τιμή μία ευσταθής και μία ασταθής ισορροπία συγκρούονται σε διακλάδωση σάγματος--κόμβου.

Ασκήσεις

Άσκηση 5.1. *(Γραμμές φάσης)* Βρείτε όλες τις ισορροπίες, σχεδιάστε τη γραμμή φάσης, προσδιορίστε ευστάθεια και το όριο κάθε φραγμένης λύσης:

(i) $y' = 3y(1 - y)$.

(ii) $y' = y^2 - 6y - 16$.

(iii) $y' = (y - 2)(1 - 2\sin y)$.

Άσκηση 5.2. *(Γραμμικοποίηση και όριά της)* Γραμμικοποιήστε τις προηγούμενες τρεις εξισώσεις σε κάθε ισορροπία. Συγκρίνετε με τη γραμμή φάσης και εξετάστε χωριστά κάθε μη υπερβολική ισορροπία.

Άσκηση 5.3. *(Διαγράμματα διακλάδωσης)* Βρείτε τιμές διακλάδωσης, κλάδους ισορροπίας και ευστάθεια, και σχεδιάστε τα διαγράμματα για

(i) $y' = \mu y(1-y)^2 - y^3$.

(ii) $y' = \mu y^2 + y^4$.

Άσκηση 5.4. *(Κυβική με δύο παραμέτρους)* Για $y' = c + dy - y^3$, δείξτε ότι πολλαπλή ισορροπία μπορεί να υπάρχει μόνο όταν $4d^3 = 27c^2$. Βρείτε τον αριθμό ισορροπιών σε κάθε περιοχή του επιπέδου (c, d) και χαρακτηρίστε την ευστάθειά τους.

Άσκηση 5.5. Ταξινομήστε τις ισορροπίες της $y' = (1+y)^2$. Λύστε ρητά και συνδέστε τη μονόπλευρη συμπεριφορά με την έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο.

Άσκηση 5.6. Έστω f τοπικά Lipschitz και $a < b$ διαδοχικές ρίζες της με $f > 0$ στο (a, b). Δείξτε ότι κάθε λύση με αρχική τιμή στο (a, b) υπάρχει για κάθε $t > 0$ και τείνει στο b. Τι αλλάζει αν $b = +\infty$;

Άσκηση 5.7. Για $y' = y^p(1-y)$, με p θετικό ακέραιο, ταξινομήστε ισορροπίες και ευστάθεια για περιττό και άρτιο p. Ποιες λύσεις είναι ολικές;

Άσκηση 5.8. Παραγάγετε την (5.3) παραγωγίζοντας την ολοκληρωτική εξίσωση ως προς την αρχική τιμή. Δείξτε ότι η ροή διατηρεί γνήσια τη διάταξη.

Άσκηση 5.9. *(Αυξημένης δυσκολίας)* Κατασκευάστε $f \in C^\infty$ ώστε το μηδέν να είναι ευσταθής ισορροπία, να συσσωρεύονται εκεί μηδενικά της f, αλλά να μην είναι ελκτική. Σχεδιάστε τη γραμμή φάσης και αποδείξτε την ευστάθεια απευθείας από τον ορισμό.

Κεφάλαιο 6

Αυτόνομα συστήματα και επίπεδο φάσης

6.1 Ροές, τροχιές και αναλλοίωτα σύνολα

Θεωρούμε το αυτόνομο σύστημα

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}), \qquad \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \tag{6.1}$$

με την $\boldsymbol{f}$ τοπικά Lipschitz. Συμβολίζουμε με $\phi(t, \boldsymbol{y}_0)$ τη λύση που περνά από το $\boldsymbol{y}_0$ όταν $t = 0$.

Ορισμός 6.1. Η εικόνα μιας μέγιστης λύσης είναι *τροχιά*. Το σύνολο όλων των τροχιών με προσανατολισμό αποτελεί το *φασικό πορτρέτο*. Ένα $S \subset \mathbb{R}^n$ είναι *θετικά αναλλοίωτο* αν $\boldsymbol{y}_0 \in S$ συνεπάγεται $\phi(t, \boldsymbol{y}_0) \in S$ για κάθε θετικό t όπου ορίζεται η λύση. Είναι *αναλλοίωτο* αν το ίδιο ισχύει και προς τις δύο χρονικές κατευθύνσεις.

Από τη μοναδικότητα προκύπτουν οι ταυτότητες της ροής

$$\phi(0, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}, \qquad \phi(t+s, \boldsymbol{y}) = \phi(t, \phi(s, \boldsymbol{y})), \qquad \phi_{-t} = \phi_t^{-1}, \tag{6.2}$$

όποτε ορίζονται οι όροι. Διαφορετικές τροχιές δεν τέμνονται: αν δύο λύσεις συναντηθούν, η μοναδικότητα και η χρονική μετατόπιση δείχνουν ότι ανήκουν στην ίδια τροχιά.

Παράδειγμα 6.2 (Τρεις απλές επίπεδες ροές)**.** (α′) Αν $\boldsymbol{f} = (1, 0)$, τότε $\phi_t(\xi, \eta) = (\xi + t, \eta)$: οριζόντιες ευθείες.

(β′) Αν $\boldsymbol{f} = (y_1, y_2)$, τότε $\phi_t(\boldsymbol{y}_0) = \mathrm{e}^{t}\boldsymbol{y}_0$: ημιευθείες μακριά από την αρχή.

(γ′) Αν $\boldsymbol{f} = (y_2, y_1)$, η $y_1^2 - y_2^2$ είναι σταθερή. Οι ευθείες $y_2 = \pm y_1$ είναι αναλλοίωτες· οι άλλες τροχιές είναι υπερβολές.

Πρόταση 6.3 (Κριτήριο φράγματος)**.** *Έστω $S = \{\boldsymbol{y} : h(\boldsymbol{y}) \le c\}$, με $h \in C^1$, και $\nabla h(\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) < 0$ όπου $h(\boldsymbol{y}) = c$. Τότε το S είναι θετικά αναλλοίωτο.*

Απόδειξη. Αν μια λύση που ξεκινά στο S το εγκατέλειπε για πρώτη φορά στη στιγμή t_*, θα είχαμε $h(\boldsymbol{y}(t_*)) = c$ και μη αρνητική δεξιά παράγωγο της $h(\boldsymbol{y}(t))$ εκεί. Ο κανόνας αλυσίδας δίνει, όμως, την αυστηρά αρνητική $\nabla h(\boldsymbol{y}(t_*)) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t_*))$, άτοπο. □

Η μη αυστηρή συνθήκη $\nabla h \cdot \boldsymbol{f} \le 0$ επίσης αρκεί με τις συνήθεις υποθέσεις ομαλότητας, αλλά η απόδειξή της χρειάζεται μικρή διαταραχή ή επιχείρημα μοναδικότητας.

Παράδειγμα 6.4 (Θετικό τεταρτημόριο στο σύστημα Lotka--Volterra)**.** Για $a, b, c, d > 0$,

$$x' = (a - by)x, \qquad y' = (dx - c)y. \tag{6.3}$$

Κάθε άξονας συντεταγμένων είναι αναλλοίωτος. Μια λύση που ξεκινά με $x, y > 0$ δεν μπορεί, λόγω μοναδικότητας, να διασχίσει άξονα, άρα το ανοιχτό θετικό τεταρτημόριο είναι αναλλοίωτο. Επιπλέον,

$$H(x, y) = dx - c\log x + by - a\log y$$

είναι σταθερό στις θετικές λύσεις. Οι ισοσταθμικές καμπύλες του περικλείουν τη θετική ισορροπία $(c/d, a/b)$, δίνοντας κλειστές τροχιές θηρευτή--θηράματος.

6.2 Ισορροπίες και ευστάθεια σε πολλές διαστάσεις

Το $\bar{\boldsymbol{y}}$ είναι ισορροπία αν $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{y}}) = 0$. Η ευστάθεια και η ασυμπτωτική ευστάθεια ορίζονται όπως στον Ορισμό 5.5, με νόρμα στη θέση της απόλυτης τιμής. Δεν εξαρτώνται από την επιλεγμένη νόρμα, αφού όλες οι νόρμες στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμες. Στο γραμμικό $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, οι ιδιοτιμές καθορίζουν την ευστάθεια.

Θεώρημα 6.5 (Ταξινόμηση γραμμικής ευστάθειας)**.** *Για $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$:*

(α′) Η αρχή είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

(β′) Είναι ευσταθής αν όλες έχουν μη θετικό πραγματικό μέρος και κάθε ιδιοτιμή στον φανταστικό άξονα είναι ημιαπλή.

(γ′) Είναι ασταθής αν κάποια ιδιοτιμή έχει θετικό πραγματικό μέρος ή αν υπάρχει μη τετριμμένο μπλοκ Jordan για ιδιοτιμή στον φανταστικό άξονα.

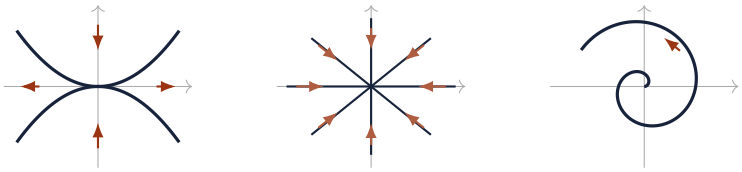
Απόδειξη. Στην πραγματική μορφή Jordan, κάθε μπλοκ δίνει όρους $t^k \mathrm{e}^{\lambda t}$. Αν $\operatorname{Re}\lambda < 0$, όλοι οι όροι φθίνουν στο μηδέν. Στον φανταστικό άξονα μένουν φραγμένοι μόνο όταν $k = 0$, δηλαδή όταν όλα τα σχετικά μπλοκ έχουν μέγεθος ένα. Αν $\operatorname{Re}\lambda > 0$, έχουμε εκθετική αύξηση. Αν $\operatorname{Re}\lambda = 0$ και $k \geq 1$, έχουμε πολυωνυμική αύξηση. Συνεπώς η e^{tA} τείνει στο μηδέν ακριβώς στην πρώτη περίπτωση και παραμένει φραγμένη ακριβώς στις περιπτώσεις της (b). Οι άλλες περιπτώσεις δίνουν αρχικές τιμές όσο μικρές θέλουμε με λύσεις που απομακρύνονται. □

Για πραγματικό πίνακα 2×2, θέτουμε $\tau = \operatorname{tr} A$, $\Delta = \det A$, $D = \tau^2 - 4\Delta$. Οι συνήθεις εικόνες συνοψίζονται στον πίνακα.

Συνθήκη	Ιδιοτιμές	Τύπος
$\Delta < 0$	πραγματικές, ετερόσημες	σάγμα, ασταθές
$\Delta > 0, D > 0, \tau < 0$	διακριτές αρνητικές πραγματικές	ελκτικός κόμβος
$\Delta > 0, D > 0, \tau > 0$	διακριτές θετικές πραγματικές	απωστικός κόμβος
$\Delta > 0, D < 0, \tau < 0$	μιγαδικές με αρνητικό πραγματικό μέρος	ελκτική σπείρα
$\Delta > 0, D < 0, \tau > 0$	μιγαδικές με θετικό πραγματικό μέρος	απωστική σπείρα
$\Delta > 0, D < 0, \tau = 0$	αμιγώς φανταστικές	κέντρο
$D = 0$	πολλαπλή πραγματική	αστεροειδής ή εκφυλισμένος κόμβος· ελέγξτε ιδιοχώρο

Η φορά δεν προκύπτει μόνο από τις ιδιοτιμές

Οι ιδιοτιμές δίνουν τύπο και ρυθμό, όχι όμως τη δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη φορά σπείρας. Εξετάστε το πεδίο σε ένα βολικό σημείο, π.χ. $(1, 0)$.



Σχήμα 6.1: Τρία φασικά πορτρέτα γραμμικών συστημάτων στο επίπεδο: σάγμα με μία ελκτική και μία απωστική διεύθυνση, ελκτικός κόμβος και περιστροφική σπείρα.

6.3 Γραμμικοποίηση μη γραμμικών συστημάτων

Μεταφέρουμε την ισορροπία στην αρχή. Αν $\boldsymbol{f} \in C^1$,

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}), \qquad A = D\boldsymbol{f}(0), \qquad \frac{\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\|}{\|\boldsymbol{y}\|} \to 0 \quad (\boldsymbol{y} \to 0). \tag{6.4}$$

Ορισμός 6.6. Μια ισορροπία είναι *υπερβολική* αν καμία ιδιοτιμή του Ιακωβιανού πίνακά της δεν έχει μηδενικό πραγματικό μέρος.

Θεώρημα 6.7 (Έμμεση μέθοδος Lyapunov)**.** *Έστω $\boldsymbol{f} \in C^1$ κοντά σε ισορροπία $\bar{\boldsymbol{y}}$, και $A = D\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{y}})$.*

(α′) Αν όλες οι ιδιοτιμές του A έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, η ισορροπία είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθής, και η σύγκλιση μάλιστα είναι εκθετική.

(β′) Αν κάποια ιδιοτιμή έχει θετικό πραγματικό μέρος, η ισορροπία είναι ασταθής.

(γ′) Αν όλες έχουν μη θετικό πραγματικό μέρος και κάποια έχει μηδενικό, η γραμμικοποίηση γενικά δεν αρκεί.

Απόδειξη της ευσταθούς περίπτωσης. Μετά τη μεταφορά, η μεταβολή σταθερών στην (6.4) δίνει

$$\boldsymbol{y}(t) = \mathrm{e}^{tA}\boldsymbol{y}_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}(s))\,ds.$$

Επιλέγουμε $M, \gamma > 0$ με $\left\|\mathrm{e}^{tA}\right\| \le M\mathrm{e}^{-\gamma t}$, όπως επιτρέπει το Θεώρημα 4.12. Από $\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\| / \|\boldsymbol{y}\| \to 0$, για κάθε μικρό $\varepsilon > 0$ βρίσκουμε $\rho > 0$ ώστε

$$\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\| \le \varepsilon \|\boldsymbol{y}\| \qquad (0 < \|\boldsymbol{y}\| \le \rho).$$

Όσο η λύση μένει σε αυτή τη σφαίρα, η ολοκληρωτική εξίσωση δίνει

$$\|\boldsymbol{y}(t)\| \le M\mathrm{e}^{-\gamma t}\|\boldsymbol{y}_0\| + M\varepsilon\int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-s)}\|\boldsymbol{y}(s)\|\,ds.$$

Πολλαπλασιάζουμε με $\mathrm{e}^{\gamma t}$ και θέτουμε $u(t) = \mathrm{e}^{\gamma t}\|\boldsymbol{y}(t)\|$. Τότε

$$u(t) \le M\|\boldsymbol{y}_0\| + M\varepsilon\int_0^t u(s)\,ds.$$

Η ανισότητα Gronwall δίνει

$$u(t) \le M\|\boldsymbol{y}_0\|\,\mathrm{e}^{M\varepsilon t}, \qquad \|\boldsymbol{y}(t)\| \le M\|\boldsymbol{y}_0\|\,\mathrm{e}^{-(\gamma - M\varepsilon)t}.$$

Επιλέγουμε $M\varepsilon < \gamma$. Αν επίσης $M\|\boldsymbol{y}_0\| < \rho$, η τελευταία εκτίμηση αποκλείει την πρώτη έξοδο από τη σφαίρα $\|\boldsymbol{y}\| < \rho$: στην υποθετική στιγμή εξόδου θα είχαμε ταυτόχρονα $\|\boldsymbol{y}\| = \rho$ και $\|\boldsymbol{y}\| < \rho$. Η λύση μένει λοιπόν εκεί, συνεχίζεται για κάθε $t \ge 0$, και συγκλίνει εκθετικά στην ισορροπία. Η αστάθεια με θετική ιδιοτιμή προκύπτει με προβολή στους γενικευμένους ιδιοχώρους θετικού πραγματικού μέρους και εκτίμηση της εξίσωσης μεταβολής σταθερών προς τα πίσω (αναπτύσσεται στην τελευταία άσκηση). □

Παράδειγμα 6.8. Για $y_1' = y_2$, $y_2' = -y_1 - 2ay_2 + y_1^3$, οι ισορροπίες είναι $(0,0)$, $(\pm 1, 0)$. Στην αρχή ο Ιακωβιανός είναι $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2a \end{smallmatrix}\right)$, και οι ιδιοτιμές έχουν πραγματικό μέρος $-a$ όταν είναι μιγαδικές· γενικότερα, για $a > 0$ έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος και για $a < 0$ κάποια έχει θετικό. Η αρχή είναι αντίστοιχα ασυμπτωτικά ευσταθής ή ασταθής. Για $a = 0$, το κριτήριο είναι ατελές. Στα $(\pm 1, 0)$, η ορίζουσα του Ιακωβιανού είναι αρνητική: και τα δύο είναι σάγματα για κάθε a.

Προσοχή

Οι αμιγώς φανταστικές ιδιοτιμές δεν αποδεικνύουν ότι μη γραμμική ισορροπία είναι κέντρο. Τα συστήματα

$$\boldsymbol{y}' = J\boldsymbol{y} - \|\boldsymbol{y}\|^2\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{y}' = J\boldsymbol{y} + \|\boldsymbol{y}\|^2\boldsymbol{y}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

έχουν την ίδια γραμμικοποίηση. Το πρώτο στρέφεται προς τα μέσα, το δεύτερο προς τα έξω.

Ασκήσεις

Άσκηση 6.1. *(Στοιχειώδεις ροές)* Βρείτε ροή και προσανατολισμένες τροχιές για

$$(a)\ \boldsymbol{f} = (1, 0), \qquad (b)\ \boldsymbol{f} = (y_1, 2y_2), \qquad (c)\ \boldsymbol{f} = (y_2, y_1).$$

Σε κάθε σύστημα βρείτε αναλλοίωτους άξονες και ισορροπίες.

Άσκηση 6.2. *(Lotka--Volterra)* Αποδείξτε αυστηρά ότι το θετικό τεταρτημόριο είναι αναλλοίωτο στην (6.3). Ελέγξτε ότι η H του Παραδείγματος 6.4 είναι πρώτο ολοκλήρωμα. Με τις ισοσταθμικές καμπύλες δείξτε ότι οι θετικές τροχιές είναι φραγμένες και κλειστές.

Άσκηση 6.3. Ταξινομήστε κάθε ισορροπία του Παραδείγματος 6.8 για όλα τα a. Όταν $a = 0$, βρείτε διατηρούμενη ενέργεια για να κρίνετε την ευστάθεια της αρχής.

Άσκηση 6.4. *(Αναλλοίωτος δίσκος και εκθετική απόσβεση)* Για

$$y_1' = y_2 - y_1(1 - y_1^2 - y_2^2), \qquad y_2' = -y_1 - y_2(1 - y_1^2 - y_2^2),$$

(i) Δείξτε ότι η αρχή είναι μοναδική ισορροπία και ταξινομήστε τη με γραμμικοποίηση.

(ii) Δείξτε ότι ο ανοιχτός μοναδιαίος δίσκος είναι αναλλοίωτος.

(iii) Αποδείξτε ότι κάθε τροχιά του δίσκου τείνει εκθετικά στην αρχή.

Υπόδειξη: βρείτε την εξίσωση του $r^2 = y_1^2 + y_2^2$.

Άσκηση 6.5. Για πραγματικό 2×2 πίνακα A, παραγάγετε τον πίνακα ταξινόμησης από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta$. Δώστε αντιπροσωπευτικό πίνακα για κάθε γραμμή.

Άσκηση 6.6. Ταξινομήστε την αρχή και σχεδιάστε φασικά πορτρέτα για

$$(a)\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (b)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad (c)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Προσέξτε τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα στο (a) και την ευθεία ισορροπιών ή την ολίσθηση στο (c).

Άσκηση 6.7. *(Εκφυλισμένη γραμμικοποίηση)* Βρείτε την ευστάθεια της αρχής για $x' = x^3 y$, $y' = -x^2 y^2$. Ο Ιακωβιανός στην αρχή είναι μηδέν· βρείτε πρώτο ολοκλήρωμα ή απαλείψτε τον χρόνο.

Άσκηση 6.8. *(Ακτινική δυναμική)* Για

$$\boldsymbol{y}' = J\boldsymbol{y} + h(\|\boldsymbol{y}\|^2)\boldsymbol{y}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

βρείτε εξισώσεις για ακτίνα και γωνία. Ταξινομήστε όλες τις κυκλικές τροχιές και την ευστάθειά τους με βάση τα μηδενικά και τα πρόσημα της h.

Άσκηση 6.9. *(Αυξημένης δυσκολίας)* Αποδείξτε την περίπτωση αστάθειας στο Θεώρημα 6.7. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη φασματική προβολή στους γενικευμένους ιδιοχώρους θετικού πραγματικού μέρους και εκτίμηση της μεταβολής σταθερών προς τα πίσω στον χρόνο.

Κεφάλαιο 7

Συναρτήσεις Lyapunov και μη γραμμική ευστάθεια

7.1 Η άμεση μέθοδος

Η γραμμικοποίηση είναι ισχυρή κοντά σε υπερβολική ισορροπία, αλλά δεν δίνει αποφασιστικό συμπέρασμα όταν υπάρχουν ιδιοτιμές στον φανταστικό άξονα. Η άμεση μέθοδος Lyapunov αναζητεί μια βαθμωτή ποσότητα που μειώνεται κατά μήκος των τροχιών. Έστω $\bar{\boldsymbol{y}}$ ισορροπία της $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$.

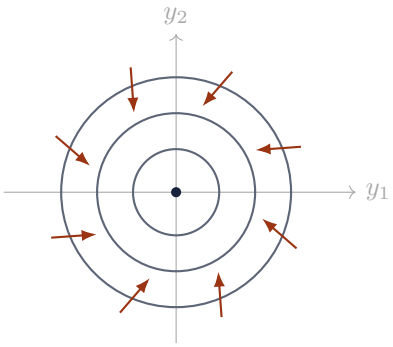
Ορισμός 7.1. Μια συνεχής V, ορισμένη κοντά στο $\bar{\boldsymbol{y}}$, είναι *θετικά ορισμένη* εκεί αν

$$V(\bar{\boldsymbol{y}}) = 0, \qquad V(\boldsymbol{y}) > 0 \quad (\boldsymbol{y} \neq \bar{\boldsymbol{y}})$$

κοντά στην ισορροπία. Αν $V \in C^1$, η παράγωγός της κατά μήκος του διανυσματικού πεδίου είναι

$$\dot{V}(\boldsymbol{y}) = \nabla V(\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}). \tag{7.1}$$

Μια θετικά ορισμένη V λέγεται *συνάρτηση Lyapunov* όταν $\dot{V} \leq 0$ κοντά στην ισορροπία.



Ισοσταθμικές καμπύλες της $V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$. Αν το πεδίο διασχίζει κάθε καμπύλη προς τα μέσα, η V μειώνεται κατά μήκος των λύσεων.

Σχήμα 7.1: Ισοσταθμικές καμπύλες συνάρτησης Lyapunov γύρω από την ισορροπία στην αρχή των αξόνων.

Θεώρημα 7.2 (Κριτήριο ευστάθειας Lyapunov)**.** *Έστω $V \in C^1$ θετικά ορισμένη κοντά σε ισορροπία $\bar{\boldsymbol{y}}$.*

(α′) Αν $\dot{V} \le 0$, η $\bar{\boldsymbol{y}}$ είναι ευσταθής.

(β′) Αν $\dot{V} < 0$ μακριά από την $\bar{\boldsymbol{y}}$, η ισορροπία είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Απόδειξη. Μεταφέρουμε την ισορροπία στο μηδέν. Για αρκετά μικρό $\varepsilon > 0$, ο αριθμός

$$m_\varepsilon = \min_{\|\boldsymbol{y}\|=\varepsilon} V(\boldsymbol{y})$$

είναι θετικός: η σφαίρα είναι συμπαγής και η συνεχής V είναι θετική σε κάθε σημείο της. Επειδή η V είναι συνεχής με $V(0) = 0$, υπάρχει $0 < \delta < \varepsilon$ ώστε $\|\boldsymbol{y}_0\| < \delta$ να συνεπάγεται $V(\boldsymbol{y}_0) < m_\varepsilon$. Κατά μήκος της λύσης,

$$\frac{d}{dt} V(\boldsymbol{y}(t)) = \dot{V}(\boldsymbol{y}(t)) \le 0.$$

Άρα $V(\boldsymbol{y}(t)) \le V(\boldsymbol{y}_0) < m_\varepsilon$ όσο βρισκόμαστε στη μικρή περιοχή. Αν η τροχιά έφτανε πρώτη φορά στη σφαίρα $\|\boldsymbol{y}\| = \varepsilon$, εκεί η V θα ήταν τουλάχιστον m_ε, αντίφαση. Επομένως μένει στο εσωτερικό, συνεχίζεται προς τα εμπρός από το κριτήριο συνέχισης και η ισορροπία είναι ευσταθής.

Για το (b), υποθέτουμε επιπλέον $\dot{V} < 0$ έξω από το μηδέν. Η τροχιά παραμένει στη μικρή κλειστή σφαίρα. Η φθίνουσα και μη αρνητική $V(\boldsymbol{y}(t))$ έχει όριο $L \ge 0$. Ας υποθέσουμε $L > 0$. Επειδή $V(0) = 0$ και η V είναι συνεχής, βρίσκουμε $r > 0$ τόσο μικρό ώστε $\|\boldsymbol{y}\| < r$ να συνεπάγεται $V(\boldsymbol{y}) < L$. Όμως $V(\boldsymbol{y}(t)) \ge L$, άρα η τροχιά παραμένει στο συμπαγές δακτυλιοειδές σύνολο $r \le \|\boldsymbol{y}\| \le \varepsilon$. Σε αυτό η συνεχής $\dot{V}$ έχει αρνητικό μέγιστο $-c_r < 0$. Ολοκληρώνοντας $dV/dt \le -c_r$, παίρνουμε $V(\boldsymbol{y}(t)) \le V(\boldsymbol{y}_0) - c_r t$, που τελικά γίνεται αρνητικό, άτοπο. Επομένως $L = 0$. Αν η $\boldsymbol{y}(t)$ δεν έτεινε στο μηδέν, κάποια ακολουθία $t_k \to \infty$ θα είχε $\|\boldsymbol{y}(t_k)\| \ge r > 0$. Στο συμπαγές δακτυλιοειδές σύνολο το V έχει θετικό ελάχιστο, σε αντίφαση με $V(\boldsymbol{y}(t_k)) \to 0$. Άρα $\boldsymbol{y}(t) \to 0$, όπως θέλαμε. □

Ημιορισμένη παράγωγος

Η συνθήκη $\dot{V} \le 0$ αποδεικνύει ευστάθεια, όχι αναγκαστικά σύγκλιση. Στον αρμονικό ταλαντωτή η ενέργεια μένει σταθερή και οι τροχιές είναι κλειστές. Για να πάρουμε ασυμπτωτική ευστάθεια από ημιορισμένη παράγωγο χρειαζόμαστε επιπλέον πληροφορία, όπως την αρχή LaSalle.

7.2 Η αρχή αναλλοιώτου του LaSalle

Θεώρημα 7.3 (LaSalle)**.** *Έστω Ω συμπαγές και θετικά αναλλοίωτο, $V \in C^1(\Omega)$, και $\dot{V} \le 0$. Θέτουμε*

$$E = \{\boldsymbol{y} \in \Omega : \dot{V}(\boldsymbol{y}) = 0\}.$$

Κάθε τροχιά στο Ω πλησιάζει, καθώς $t \to \infty$, το μεγαλύτερο αναλλοίωτο υποσύνολο του E.

Γιατί ισχύει; Η $V(\boldsymbol{y}(t))$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη στο συμπαγές Ω, άρα έχει όριο. Κάθε σημείο συσσώρευσης $\boldsymbol{p}$ της τροχιάς ανήκει στο Ω. Αν $\dot{V}(\boldsymbol{p}) < 0$, υπάρχει μικρή περιοχή του $\boldsymbol{p}$ στην οποία $\dot{V} \le -c < 0$. Οι λύσεις έχουν εκεί ομοιόμορφα φραγμένη ταχύτητα, αφού η $\boldsymbol{f}$ είναι φραγμένη στο συμπαγές Ω. Κάθε επιστροφή αρκετά κοντά στο $\boldsymbol{p}$ κρατά επομένως τη λύση στην περιοχή επί ένα κοινό

θετικό χρονικό διάστημα. Σε κάθε τέτοια επιστροφή η V θα μειωνόταν κατά μία κοινή θετική ποσότητα. Επιλέγοντας επιστροφές με μη επικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα, καταλήγουμε σε αντίφαση με το ότι η V έχει πεπερασμένο όριο. Επομένως όλα τα σημεία συσσώρευσης ανήκουν στο E. Η χρονική μετατόπιση της ροής δείχνει ότι το σύνολό τους είναι αναλλοίωτο. Άρα περιέχεται στο μεγαλύτερο αναλλοίωτο υποσύνολο του E. Η συμπάγεια εξασφαλίζει ότι υπάρχουν σημεία συσσώρευσης και ότι η τροχιά δεν διαφεύγει στο άπειρο.

Παράδειγμα 7.4 (Μη γραμμική απόσβεση: διορθωμένη εξίσωση)**.** Θεωρούμε

$$y'' + (y')^5 + y + y^3 = 0. \tag{7.2}$$

Με $v = y'$, η μηχανική ενέργεια είναι

$$V(y, v) = \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{4}y^4.$$

Παραγωγίζοντας κατά μήκος της λύσης,

$$\dot V = v(-v^5 - y - y^3) + (y + y^3)v = -v^6 \le 0.$$

Η ενέργεια αυξάνει προς το άπειρο καθώς $\|(y, v)\| \to \infty$. Άρα η λύση παραμένει σε συμπαγές υποεπίπεδο ενέργειας και είναι ολική. Το $\dot V = 0$ σημαίνει $v = 0$. Για να παραμείνει τροχιά εκεί πρέπει επιπλέον $v' = -y - y^3 = 0$, άρα $(y, v) = (0, 0)$. Από την αρχή LaSalle, $(y(t), y'(t)) \to (0, 0)$.

Διόρθωση στο υλικό του 2022

Ο εκθέτης 4 στην αντίστοιχη άσκηση του 2022 δεν μπορεί να είναι σωστός: στην $y'' + (y')^5 + y + y^4 = 0$, η σταθερή λύση $y \equiv -1$ διαψεύδει τη σύγκλιση στο μηδέν. Η αντικατάσταση του y^4 με y^3 δίνει το θετικό, εξαναγκαστικό δυναμικό που χρησιμοποιούμε παραπάνω.

Παράδειγμα 7.5 (Αμιγώς φανταστικές ιδιοτιμές)**.** Στο

$$\begin{cases} y_1' = y_2 - y_1^3 \cos(y_1^2 + y_2^2), \\ y_2' = -y_1 - y_2^3 \cos(y_1^2 + y_2^2), \end{cases}$$

ο Ιακωβιανός στην αρχή έχει ιδιοτιμές $\pm \mathrm{i}$. Η γραμμικοποίηση δεν αρκεί. Για $V = (y_1^2 + y_2^2)/2$,

$$\dot V = -(y_1^4 + y_2^4)\cos(y_1^2 + y_2^2).$$

Αυτή είναι αρνητική εκτός της αρχής στον δίσκο $y_1^2 + y_2^2 < \pi/2$, άρα η αρχή είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

7.3 Ισοσταθμικές καμπύλες ενέργειας και συντηρητικά συστήματα

Για την

$$y'' + g(y) = 0, \tag{7.3}$$

θέτουμε $G(y) = \int_0^y g(s)\,ds$. Κατά μήκος λύσης,

$$E(y, y') = \tfrac{1}{2}(y')^2 + G(y), \qquad \frac{dE}{dt} = 0. \tag{7.4}$$

Άρα οι καμπύλες φάσης βρίσκονται σε ισοσταθμικές καμπύλες ενέργειας. Ένα αυστηρό τοπικό ελάχιστο της G δίνει ευσταθή ισορροπία, ενώ η διατήρηση της ενέργειας εμποδίζει την έλξη κοντινών μη σταθερών τροχιών.

Παράδειγμα 7.6. Για $y'' + (1 - \mathrm{e}^{-y^2})y = 0$, μπορούμε να πάρουμε

$$G(y) = \tfrac{1}{2}(y^2 + \mathrm{e}^{-y^2} - 1).$$

Είναι μη αρνητική, μηδενίζεται μόνο στο μηδέν και τείνει στο άπειρο με το $|y|$. Οι τροχιές είναι οι κλειστές ισοσταθμικές καμπύλες

$$\tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{2}(y^2 + \mathrm{e}^{-y^2} - 1) = C > 0,$$

που περιβάλλουν την ευσταθή αλλά μη ελκτική αρχή.

7.4 Κατασκευή συναρτήσεων Lyapunov

Κάθε ασυμπτωτικά ευσταθές γραμμικό σύστημα διαθέτει τετραγωνική συνάρτηση Lyapunov.

Θεώρημα 7.7 (Θεώρημα πινάκων Lyapunov)**.** *Αν κάθε ιδιοτιμή του A έχει αρνητικό πραγματικό μέρος και $Q = Q^T > 0$, τότε ο πίνακας*

$$P = \int_0^\infty \mathrm{e}^{tA^T} Q \mathrm{e}^{tA}\, dt$$

είναι συμμετρικός, θετικά ορισμένος, και η μοναδική συμμετρική λύση της

$$A^T P + PA = -Q. \tag{7.5}$$

Συνεπώς $V(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T P \boldsymbol{y}$ ικανοποιεί $\dot V = -\boldsymbol{y}^T Q \boldsymbol{y} < 0$ εκτός του μηδενός.

Απόδειξη. Η εκθετική απόσβεση δίνει $\left\| \mathrm{e}^{tA^T} Q \mathrm{e}^{tA} \right\| \le M^2 \|Q\| \, \mathrm{e}^{-2\gamma t}$, οπότε το ολοκλήρωμα συγκλίνει. Ολοκλήρωμα συμμετρικών πινάκων είναι συμμετρικό. Αν $\boldsymbol{x} \neq 0$,

$$\boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x} = \int_0^\infty (\mathrm{e}^{tA}\boldsymbol{x})^T Q (\mathrm{e}^{tA}\boldsymbol{x})\, dt > 0 :$$

ο ολοκληρωτέος όρος είναι θετικός στο $t = 0$, άρα και σε μια μικρή περιοχή του. Παραγωγίζοντας ως προς t τον $\mathrm{e}^{tA^T} Q \mathrm{e}^{tA}$ και ολοκληρώνοντας από 0 μέχρι ∞, βρίσκουμε

$$A^T P + PA = \left[\mathrm{e}^{tA^T} Q \mathrm{e}^{tA} \right]_0^\infty = -Q.$$

Αν P_1, P_2 είναι δύο λύσεις, η διαφορά $H = P_1 - P_2$ ικανοποιεί $A^T H + HA = 0$. Άρα η παράγωγος της $\mathrm{e}^{tA^T} H \mathrm{e}^{tA}$ είναι μηδέν, επομένως ο πίνακας ισούται με H για όλα τα t. Όμως τείνει στο μηδέν από την εκθετική απόσβεση· έτσι $H = 0$. □

Οι συναρτήσεις Lyapunov δίνουν επίσης ολικά φράγματα.

Πρόταση 7.8 (Απορροφητικό ακτινικό φράγμα)**.** *Έστω $\boldsymbol{f}$ τοπικά Lipschitz στο $\mathbb{R}^n$ και, για κάποιο $R > 0$,*

$$\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) < 0 \qquad (\|\boldsymbol{y}\| \ge R).$$

Κάθε λύση προς τα εμπρός είναι ολική και φραγμένη. Η κλειστή σφαίρα ακτίνας R είναι θετικά αναλλοίωτη, ενώ μια λύση έξω από αυτήν έχει γνησίως φθίνουσα ακτίνα μέχρι να εισέλθει ή να την πλησιάσει.

Απόδειξη. Για $V = \|\boldsymbol{y}\|^2/2$, στη σφαίρα και έξω από αυτήν ισχύει $\dot V = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) < 0$. Η τροχιά δεν μπορεί να διασχίσει τη σφαίρα προς τα έξω, και έξω από αυτήν η ακτίνα δεν υπερβαίνει την αρχική. Έτσι παραμένει φραγμένη σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα· η εναλλακτική της έκρηξης δίνει ολική ύπαρξη. □

Ασκήσεις

Άσκηση 7.1. *(Μη υπερβολικός αναλλοίωτος δίσκος)* Για $n \geq 2$, θεωρήστε

$$x' = x^3 - x + \frac{1}{\sqrt{n}} y^2, \qquad y' = y\left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{n}} x\right).$$

(i) Βρείτε όλες τις ισορροπίες και ταξινομήστε τις υπερβολικές.

(ii) Δείξτε ότι ο $x^2 + y^2 < 1$ είναι θετικά αναλλοίωτος και κάθε τροχιά του τείνει στην αρχή.

(iii) Δείξτε ότι ο μοναδιαίος κύκλος είναι αναλλοίωτος και μελετήστε τα όρια των τροχιών του.

(iv) Εξηγήστε γιατί δεν ισχύει ενιαία εκθετική σύγκλιση στην αρχή για όλες τις αρκετά μικρές αρχικές τιμές. Υπόδειξη: εξετάστε την αργή δυναμική κοντά στην κεντρική διεύθυνση της μηδενικής ιδιοτιμής.

Διόρθωση στο υλικό του 2022

Στο φυλλάδιο του 2022 ζητούνταν εκθετική σύγκλιση στο (ii). Αυτός ο ρυθμός δεν ισχύει κοντά στη μη υπερβολική αρχή. Το σωστό συμπέρασμα είναι σύγκλιση στο μηδέν. Η ταυτότητα $(x^2+y^2)' = 2x^2(x^2+y^2-1)$ και η αρχή LaSalle δίνουν τη διορθωμένη δήλωση.

Άσκηση 7.2. *(Διορθωμένη μη γραμμική απόσβεση)* Συμπληρώστε όλες τις λεπτομέρειες συμπάγειας και αναλλοιώτου στο Παράδειγμα 7.4. Γενικεύστε για $y'' + h(y') + g(y) = 0$, όταν $v h(v) > 0$ για $v \neq 0$, $y g(y) > 0$ για $y \neq 0$ και $\int_0^y g(s)\,ds \to \infty$ καθώς $|y| \to \infty$.

Άσκηση 7.3. *(Συντηρητικό φασικό πορτρέτο)* Γράψτε ως σύστημα πρώτης τάξης την εξίσωση του Παραδείγματος 7.6. Αποδείξτε τις ιδιότητες της G, σχεδιάστε ισοσταθμικές καμπύλες ενέργειας και βρείτε τη φορά κίνησης στα δύο μισά κάθε κλειστής τροχιάς.

Άσκηση 7.4. *(Φραγμένες λύσεις έξω από δίσκο)* Έστω $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ τοπικά Lipschitz και, για κάποιο $k > 0$,

$$y_1 f_1(y_1, y_2) + y_2 f_2(y_1, y_2) < 0 \quad \text{όταν } y_1^2 + y_2^2 > k.$$

Δείξτε ότι όλες οι λύσεις είναι ολικές και φραγμένες για $t \geq 0$. Δώστε ακριβές φράγμα από αρχική τιμή και k.

Άσκηση 7.5. Με $Q = I$ στο Θεώρημα 7.7, κατασκευάστε τετραγωνική συνάρτηση Lyapunov για

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε τον συμμετρικό P απευθείας και συγκρίνετε με τον ολοκληρωτικό τύπο.

Άσκηση 7.6. Για $x' = y - x(x^2+y^2-1)$, $y' = -x - y(x^2+y^2-1)$, βρείτε εξισώσεις για r, θ. Ταξινομήστε την αρχή και την περιοδική τροχιά $r = 1$. Ποιες περιοχές είναι αναλλοίωτες;

Άσκηση 7.7. *(Ημιορισμένη παράγωγος)* Στην $x' = y$, $y' = -x - y^3$, χρησιμοποιήστε $V = (x^2+y^2)/2$, βρείτε το μεγαλύτερο αναλλοίωτο υποσύνολο του $\{\dot V = 0\}$, και

αποδείξτε ολική ασυμπτωτική ευστάθεια. Γιατί δεν αρκεί μόνο το Θεώρημα 7.2 χωρίς την αρχή LaSalle;

Άσκηση 7.8. Έστω V θετικά ορισμένη και ακτινικά απεριόριστη στον $\mathbb{R}^n$, με $\dot{V} \leq -cV$, $c > 0$. Αποδείξτε ολική εκθετική ευστάθεια και βρείτε ρητή εκτίμηση όταν $m \|\boldsymbol{y}\|^2 \leq V(\boldsymbol{y}) \leq M \|\boldsymbol{y}\|^2$.

Άσκηση 7.9. *(Κριτήριο αστάθειας Chetaev, αυξημένης δυσκολίας)* Έστω G ανοιχτό με $0 \in \partial G$, ώστε κάθε περιοχή του μηδενός να συναντά το G. Έστω $V \in C^1$ με $V > 0$ στο G, $V = 0$ στο τοπικό σύνορο του G, και $\dot{V} \geq cV$ στο G, για κάποιο $c > 0$. Δείξτε ότι η αρχή είναι ασταθής. Εφαρμόστε σε μη γραμμικό σύστημα με ιδιοτιμή θετικού πραγματικού μέρους και συγκρίνετε με το Θεώρημα 6.7.

Σύντομος οδηγός ποιοτικής μελέτης

Για μια νέα αυτόνομη εξίσωση ή σύστημα, η εξής σειρά βημάτων είναι συχνά χρήσιμη:

1. Βρείτε τις ισορροπίες και τις παραμέτρους όπου συγχωνεύονται ή χάνουν την υπερβολικότητα.
2. Ελέγξτε την ύπαρξη στο χρονικό διάστημα που σας ενδιαφέρει. Αναζητήστε φράγματα αύξησης, αναλλοίωτες περιοχές ή εξαναγκαστική ενέργεια πριν μιλήσετε για $t \to \infty$.
3. Σε μία διάσταση σχεδιάστε γραμμή φάσης· περιέχει σχεδόν όλη την ποιοτική πληροφορία.
4. Σε δύο διαστάσεις υπολογίστε Ιακωβιανό και ταξινομήστε υπερβολικές ισορροπίες. Δείτε τα ιδιοδιανύσματα και ένα βέλος για τη φορά του πορτρέτου.
5. Αν η γραμμικοποίηση δεν αρκεί, αναζητήστε ενέργεια, ακτινική ποσότητα, πρώτο ολοκλήρωμα ή συνάρτηση Lyapunov.
6. Ξεχωρίστε φραγμένοτητα, ευστάθεια, ελκτικότητα και ασυμπτωτική ευστάθεια. Κάθε μετάβαση χρειάζεται επιχείρημα.
7. Αν $\dot{V} \leq 0$, αλλά όχι αυστηρά $\dot{V} < 0$, προσδιορίστε το μεγαλύτερο αναλλοίωτο υποσύνολο του $\{\dot{V} = 0\}$ πριν ισχυριστείτε σύγκλιση.

Τέλος σημειώσεων