Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (ΜΕΜ-273)

1 Κλασικά παραδείγματα (γραμμικών) ΜΔΕ

1.1 Εξίσωση μεταφοράς

Εξίσωση 1ης τάξης. Μοντελοποιεί τη συγκέντρωση μιας ουσίας σε ένα ρευστό, η οποία ρέει με σταθερό ρυθμό:

$$u_t + b \cdot \nabla u = 0, \quad \text{στον} \quad \mathbb{R}^n \times [0, +\infty), \tag{1.1}$$

όπου $u(x,t) : \mathbb{R}^n \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\nabla u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$.

Παρατήρηση 1.1. *Έστω u οποιαδήποτε C^1 συνάρτηση. Τότε ορίζοντας $z(s) = u(x+sb, t+s)$ και χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας παίρνουμε:*

$$z'(s) = u_t(x+sb, t+s) + b \cdot \nabla u(x+sb, t+s).$$

Αν επιπλέον η u λύνει την εξίσωση (1.1)*, τότε παίρνουμε $z'(s) = 0$, δηλ. η $z(s)$ είναι σταθερή συνάρτηση. Γράφοντας*

$$(x+sb, t+s) = (x,t) + s(b,1),$$

συμπεραίνουμε ότι οι λύσεις της (1.1) *είναι σταθερές κατα μήκος της ευθείας του $\mathbb{R}^{n+1}$ που διέρχεται από το (x,t) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $(b,1)$.*

1.2 Εξισώσεις Cauchy-Riemann

Πρόκειται για το σύστημα 1ης τάξης:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}, \tag{1.2}$$

όπου $u(x,y), v(x,y) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Δεδομένης λύσης των εξισώσεων (1.2), λέμε πως η μιγαδική συνάρτηση $f = u + iv$ είναι ολόμορφη.

1.3 Εξίσωση Laplace

Εξίσωση 2ης τάξης, απ΄ τις πιο σημαντικές σημαντικές στα μαθηματικά και τη φυσική:

$$\Delta u = 0, \quad \text{στο} \quad W \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

όπου $u : W \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $\Delta u = u_{x_1x_1} + \ldots u_{x_nx_n}$. Τέτοιες συναρτήσεις λέγονται και αρμονικές.

Παρατήρηση 1.2. *Για u, v κλάσης C^2 που λύνουν το σύστημα* (1.2) *έχουμε ότι*

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy} \quad \Rightarrow \quad \Delta u = 0,$$
$$v_{yy} = u_{xy} = u_{yx} = -v_{xx} \quad \Rightarrow \quad \Delta v = 0.$$

Άρα η ολομορφία της $u + iv$ συνεπάγεται ότι u, v αρμονικές. Το αντίστροφο δεν ισχύει, εφόσον η $f(z) = \bar{z} = x - iy$ δεν είναι ολόμορφη ακόμα κι αν οι $u = x, v = -y$ είναι αρμονικές.

Η αντίστοιχη ανομοιογενής εξίσωση λέγεται **εξίσωση Poisson**:

$$\Delta u = f, \quad \text{στο} \quad W \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.4}$$

όπου $f : W \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Φυσική ερμηνεία $(n = 3)$. Έστω $\rho : W \to \mathbb{R}$ μια πυκνότητα μάζας και $\mathbf{g}$ το επαγόμενο βαρυτικό πεδίο. Υποθέτοντας ότι είναι αστρόβιλο, δηλ. $\nabla \times \mathbf{g} = 0$, υπάρχει $\phi : W \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{g} = -\nabla \phi. \tag{1.5}$$

Από την άλλη μεριά, ο νόμος του Gauss (προερχόμενος από τον νόμο του Νεύτωνα) λέει ότι

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = -4\pi G \rho. \tag{1.6}$$

Έτσι παίρνουμε ότι το βαρυτικό δυναμικό ϕ λύνει την εξίσωση (1.4) με $f = 4\pi G \rho$.

1.4 Εξίσωση θερμότητας

Εξίσωση 2ης τάξης, αναπτύχθηκε από τον Fourier (1822) για να μοντελοποιήσει τη διάχυση της θερμότητας σε μια περιοχή:

$$u_t = \alpha \Delta u, \quad \text{στο} \quad W \times [0, +\infty), \quad W \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.7}$$

όπου ο συντελεστής $\alpha > 0$ είναι η θερμική αγωγιμότητα ενός μέσου.

Παρατήρηση 1.3. *Συνήθως θεωρούμε $\alpha = 1$ για τον εξής λόγο. Ας υποθέσουμε ότι $u(x,t)$ λύνει την εξίσωση* (1.7). *Θέτουμε $v(x,t) := u(x, t/\alpha)$. Από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε:*

$$v_t = \frac{\partial}{\partial t} u(x, \frac{t}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha} u_t(x, \frac{t}{\alpha}) = \Delta u(x, \frac{t}{\alpha}) = \Delta v.$$

Επομένως για την επίλυση της εξίσωσης (1.7), *αρκεί να μελετήσουμε την περίπτωση $\alpha = 1$.*

Φυσική ερμηνεία. Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση u δίνει τη θερμοκρασία σε κάθε σημείο (x,t) και $V \subset W$, τότε η συνολική θερμοκρασία στο V ισούται με

$$\partial_t \int_V u dx = -\int_{\partial V} \vec{F} \cdot \nu dS,$$

όπου η δύναμη $\vec{F}$ είναι η ροή θερμότητας και ν το εξωτερικό κάθετο της επιφάνειας ∂V. Από το θεώρημα απόκλισης του Gauss έπεται ότι

$$\int_V u_t = -\int_V \operatorname{div} \vec{F} dx.$$

Εφόσον το V είναι τυχαίο, έχουμε

$$u_t = -\operatorname{div} \vec{F}.$$

Ο νόμος του Fourier δίνει τη σχέση $\vec{F} = -\alpha \nabla u$, από όπου καταλήγουμε στην εξίσωση (1.7).

1.5 Εξίσωση κύματος

Εξίσωση 2ης τάξης, περιγράφει κύματα στην κλασική φυσική (μηχανικά, ηλεκτρομαγνητικά κλπ):

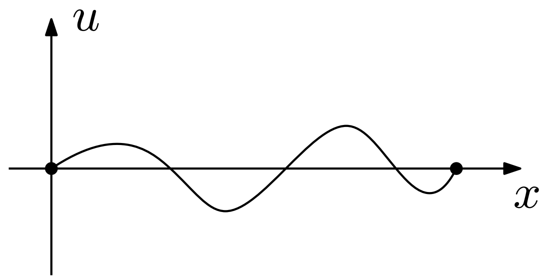
$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \quad \text{στο} \quad W \times [0, +\infty), \quad W \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.8}$$

όπου ο συντελεστής $c > 0$ αναπαριστά την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων.

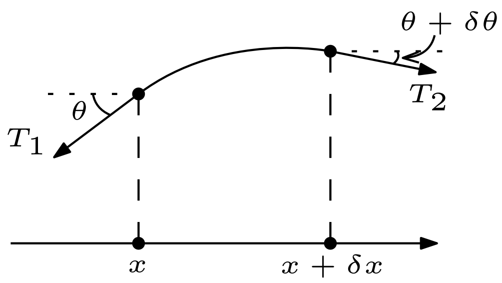
Παρατήρηση 1.4. *Όπως για την εξίσωση θερμότητας, βλέπε Παρατήρηση 1.3, για την επίλυση της εξίσωσης* (1.8), *μπορούμε να υποθέσουμε ότι $c = 1$. Πράγματι, θέτοντας $v(x,t) = u(x, t/c)$ έχουμε*

$$v_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, \frac{t}{c}) = \frac{1}{c^2} u_{tt}(x, \frac{t}{c}) = \Delta u(x, \frac{t}{c}) = \Delta v.$$

Παλλόμενη χορδή ($n = 1$). Διαταράσσοντας μια χορδή με σταθερά άκρα, όπως ενός μουσικού οργάνου, αυτή αρχίζει και πάλλεται. Ας υποθέσουμε ότι η χορδή αρχικά είναι οριζόντια και ας θέσουμε $u(x,t)$ να είναι το ύψος του σημείου αρχικής θέσης x τη χρονική στιγμή t (βλέπε Σχήμα 1).



Σχήμα 1: Παλλόμενη χορδή τη χρονική στιγμή t.



Σχήμα 2: Τμήμα της παλλόμενης χορδής.

Κάνουμε τις εξής παραδοχές: η δύναμη της βαρύτητας είναι αμελητέα και η τάση είναι παντού ίδιου μεγέθους T, δηλ. $|T_1| \approx |T_2| \approx T$ (Σχήμα 2). Η τελευταία υπόθεση είναι ρεαλιστική στην περίπτωση που η γωνία της εφαπτομένης σε κάθε σημείο της χορδής τη χρονική στιγμή t είναι μικρή.

Θεωρούμε το τμήμα της χορδής τη χρονική στιγμή t ανάμεσα στα χωρικά σημεία x και $x + \delta x$ (Σχήμα 2). Η μάζα του τμήματος αυτού ισούται με

$$m = \rho(\delta x),$$

όπου ρ είναι η γραμμική πυκνότητα μάζας της χορδής. Από το νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε τον τύπο:

$$F_\perp = ma = mu_{tt},$$

όπου a είναι η επιτάχυνση σημείου της χορδής στην κατακόρυφη κατεύθυνση.

Από την άλλη μεριά, η τάση στα δύο άκρα του παραπάνω τμήματος μας δίνει ότι

$$\begin{aligned} F_\perp &= |T_1| \sin(\theta + \delta\theta) - |T_2| \sin\theta \\ &\approx T[\sin(\theta + \delta\theta) - \sin\theta] && \text{(ίδια τάση)} \\ &\approx T[\tan(\theta + \delta\theta) - \tan\theta] && \text{(μικρές γωνίες)} \\ &= T[u_x(x + \delta x, t) - u_x(x, t)], \end{aligned}$$

όπου θ και $\theta + \delta\theta$ οι γωνίες που σχηματίζουν αντίστοιχες δυνάμεις με τον άξονα x (Σχήμα 2).

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ισότητες καταλήγουμε στη σχέση

$$u_{tt}(x, t) = \frac{T}{\rho} \frac{u_x(t, x + \delta x) - u_x(x, t)}{\delta x}$$

Αφήνοντας το $\delta x \to 0$, παίρνουμε την εξίσωση (1.8) για $c^2 = T/\rho$.

1.6 Ασκήσεις

Άσκηση 1. *Βρείτε τη λύση της εξισώσης μεταφοράς* (1.1) *κάτω από τη συνθήκη* $u(x, 0) = f(x)$. *Κάντε το ίδιο για την ανομοιογενή εξίσωση*

$$u_t + b \cdot \nabla u = g,$$

όπου $g(x, t) : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Άσκηση 2. *Δείξτε ότι η συναρτήσεις* $\log(x^2 + y^2)$, $(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ *ικανοποιούν την εξίσωση Laplace* (1.3) *μακριά από το 0 για* $n = 2$, $n = 3$ *αντίστοιχα.*

Άσκηση 3. *Έστω σημειακή μάζα* M *στο κέντρο των αξόνων. Το βαρυτικό πεδίο που επάγει δίνεται από τον τύπο*

$$\mathbf{g} = -\frac{MG}{|x|^2} \frac{x}{|x|} \qquad \text{(νόμος του Νεύτωνα)}$$

Για $n = 3$, *δείξτε ότι το curl του* $\mathbf{g}$ *είναι 0 και υπολογίστε το βαρυτικό δυναμικό* ϕ (1.5). *Ποια είναι η* f *στην αντίστοιχη εξίσωση Poisson;*

Άσκηση 4. *Έστω* $u(x,t)$ *λύση της εξίσωσης θερμότητας* (1.7) *και* $v(x,t)$ *λύση της εξίσωσης κύματος. Δείξτε ότι οι* $u(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda^2})$, $v(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda})$ *είναι λύσεις των αντίστοιχων εξισώσεων για* $\lambda \neq 0$.

Άσκηση 5. *Δείξτε ότι η συνάρτηση* $t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ *ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας* (1.7) *στο* $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

Άσκηση 6. *Γράψτε την κυματοεξίσωση* (1.8) *σαν σύστημα πρώτης τάξης.*

Άσκηση 7. *Γράψτε την κυματοεξίσωση* (1.8) *σαν εξίσωση μεταφοράς για συνδυασμό μερικών παραγώγων της* u *στη διάσταση* $n = 1$. *Μπορείτε να τη λύσετε χρησιμοποιώντας την Άσκηση 1; Τι πληροφορία χρειάζεστε για να προσδιορίσετε ακριβώς τη λύση;*

2 Εξισώσεις 1ης τάξης

2.1 Γενική μορφή

Θεωρούμε την εξίσωση

$$F(u_t, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, x, t) = 0, \quad \text{στο} \quad W \times [0, +\infty), \quad W \subset \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

όπου $F : \mathbb{R}^{n+1} \times W \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Χωρίς περαιτέρω πληροφορία για την F, η επίλυση της (2.1) είναι πρακτικά αδύνατη. Θεωρούμε τις εξής κλάσεις εξισώσεων:

Γραμμικές

$$a(x,t)u_t + \vec{b}(x,t) \cdot \nabla u + c(x,t)u = d(x,t) \tag{2.2}$$

Ημιγραμμικές

$$a(x,t)u_t + \vec{b}(x,t) \cdot \nabla u + c(u,x,t) = 0 \tag{2.3}$$

Οιονεί γραμμικές

$$a(u,x,t)u_t + \vec{b}(u,x,t) \cdot \nabla u + c(u,x,t) = 0 \tag{2.4}$$

Παρατήρηση 2.1. *Στις παραπάνω εξισώσεις οι συναρτήσεις* a, b, c, d *θεωρούνται δοσμένες. Ο άγνωστος είναι το* u *και η γραμμικότητα ή μη εννοείται ως προς το* u.

Συστήματα 1ης τάξης ορίζονται παρόμοια, γράφοντας

$$a^i u^i_t + \vec{b}^i \cdot \nabla u^i + c^i u = d^i, \qquad i = 1, \dots, k, \tag{2.5}$$

όπου τα $a^i, \vec{b}^i, c^i, d^i$ εξαρτώνται ή όχι από όλες τις $u^1, \dots, u^k$, ανάλογα με τις αντίστοιχες κλάσεις εξισώσεων.

Παράδειγμα 2.2 ($n = 1$). *Η εξίσωση*

$$u_t + (x^2+1)u_x + u^2 = x^2 - t$$

είναι ημιγραμμική, λόγω της μη γραμμικότητας u^2, *ενώ το σύστημα*

$$\begin{cases} xu_t - vu_x + tu^2 = 0 \\ v_t + v_x + uv = xt \end{cases}$$

είναι οιονεί γραμμικό, λόγω του όρου vu_x *στην πρώτη εξίσωση.*

2.2 Γενική λύση και το πρόβλημα αρχικών τιμών

Οι $C^1(W \times [0,+\infty))$ συναρτήσεις που ικανοποιούν την (2.1) συνιστούν τη γενική λύση. Η οικογένεια των λύσεων αυτών χαρακτηρίζεται καλύτερα μέσω του προβλήματος αρχικών τιμών (ΠΑΤ):

$$\begin{cases} F(u_t, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, x, t) = 0, \quad \text{στο} \quad W \times [0,+\infty), \quad W \subset \mathbb{R}^n \\ u = f, \quad \text{στο} \quad \Gamma \end{cases} \tag{2.6}$$

όπου $\Gamma \subset W \times [0,+\infty)$ σύνολο διάστασης n και $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ δοσμένη αρχική συνθήκη. Ένα ΠΑΤ λέγεται "καλά ορισμένο", αν η αντίστοιχη λύση υπάρχει και προσδιορίζεται μονοσήμαντα από την αρχική συνθήκη.

Παράδειγμα 2.3. *($n = 1$) Η εξίσωση $u_t + u_x = 0$ έχει γενική λύση $u = f(x-t)$, όπου $f \in C^1(\mathbb{R})$. Άρα στο ημιεπίπεδο $\mathbb{R} \times [0,+\infty)$, το ΠΑΤ είναι καλά ορισμένο με αρχική συνθήκη στον άξονα x, δηλ $\Gamma = \{t = 0\}$.*

Από την άλλη μεριά, το ΠΑΤ δεν είναι καλά ορισμένο στο πρώτο τεταρτημόριο $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$ με αρχική συνθήκη στον θετικό ημιάξονα $\Gamma = \{t = 0, x \geq 0\}$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι η $u(x,t)$ για $t > x$ δεν μπορεί να προσδιοριστεί από τις τιμές της $u(x,0)$ με $x \geq 0$. Αυτό διορθώνεται θεωρώντας $\Gamma = \{t = 0, x \geq 0\} \cup \{x = 0, t \geq 0\}$, δηλ. αρχικές συνθήκες και στους δύο θετικούς ημιάξονες.

2.3 Επανεξέταση της εξίσωσης μεταφοράς

Προτού προχωρήσουμε σε γενικές μεθόδους επίλυσης εξισώσεων 1ης τάξης, επιστρέφουμε στην εξίσωση μεταφοράς (1.1) για την επίλυση του ΠΑΤ:

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du = 0, \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}^n \times [0,+\infty) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \tag{2.7}$$

Θα δούμε διαφορετικούς τρόπους επίλυσης βασιζόμενους σε διαφορετικές ερμηνείες της εξίσωσης.

Ισοσταθμικές. Θέτοντας $Du = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_t)$, η εξίσωση (1.1) ξανά γράφεται

$$Du \cdot (b, 1) = 0,$$

το οποίο ισοδυναμεί με τη δήλωση ότι το συνολικό gradient της u είναι κάθετο στο διάνυσμα $(b,1)$. Από την άλλη μεριά ξέρουμε ότι το Du είναι κάθετο στις ισοσταθμικές της u:

$$\Gamma_c = \{u(x,t) = c\}$$

Το σύνολο του οποίου ο εφαπτόμενος χώρος σε κάθε σημείο παράγεται από το $(b,1)$ είναι η ευθεία παράλληλη σε αυτό. Συμπεραίνουμε ότι η ισοσταθμική δίνεται από

$$\Gamma_c = \{(x_c, t_c) + s(b,1) : s \in I\}, \qquad u(x_c, t_c) = c,$$

όπου $I \subset \mathbb{R}$ είναι οι τιμές του s για τις οποίες το αντίστοιχο κομμάτι της ευθείας βρίσκεται μέσα στο πεδίο ορισμού της u. Θέτοντας $s = 0$ και $s = -t$, παίρνουμε $u(x,t) = u(x - bt, 0) = f(x - bt)$.

Χαρακτηριστικές. Είναι οι καμπύλες $\gamma(s) = (t(s), x(s))$ που ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{cases} t'(s) = 1 \\ x'(s) = b \end{cases}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε

$$\begin{aligned} & z(s) = u \circ \gamma(s) \\ \Rightarrow \quad & z'(s) = D_{\gamma(s)} u \cdot \gamma'(s) = t'(s) u_t(\gamma(s)) + x'(s) \cdot (\nabla u)(\gamma(s)) = u_t(\gamma(s)) + b \cdot (\nabla u)(\gamma(s)) = 0, \end{aligned}$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι η u είναι σταθερή κατά μήκος της $\gamma(s)$. Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε

$$\begin{cases} t = s + t_c \\ x = bs + x_c \end{cases}, \qquad s \in \mathbb{R}$$

και οι $\gamma(s) = (x_c + sb, t_c + s)$ είναι οι ευθείες που ήδη είδαμε στο παραπάνω επιχείρημα των ισοσταθμικών.

Αλλαγή συντεταγμένων. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση μεταφοράς γράφεται ως κατευθυνόμενη παράγωγος

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \text{για} \quad \nu = (b, 1).$$

Άρα η εξίσωση απλοποιείται δουλεύοντας με συντεταγμένες για τις οποίες το ν είναι παράλληλο σε έναν βασικό άξονα. Για να βρούμε την κατάλληλη αλλαγή συντεταγμένων, θεωρούμε πάλι το σύστημα των χαρακτηριστικών:

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = 1 \\ \frac{dx}{ds} = b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = b \quad \Rightarrow \quad b dx - dt = 0 \quad \Rightarrow \quad bx - t = \text{σταθ.}$$

Ορίζουμε τη νέα συντεταγμένη $\widetilde{x} = bx - t$, της οποίας οι ισοσταθμικές είναι οι χαρακτηριστικές. Έχουμε την ελευθερία να αλλάξουμε τη συντεταγμένη $\widetilde{t} = \widetilde{t}(x,t)$. Για την ώρα υπολογίζουμε

$$\frac{\partial \widetilde{x}_i}{\partial t} = b_i, \quad \frac{\partial \widetilde{x}_i}{\partial x_j} = -1.$$

Από τον κανόνα αλυσίδας για την $u(\widetilde{x}, \widetilde{t})$ έχουμε

$$\begin{aligned} u_t + b \cdot \nabla u &= u_{\widetilde{t}} \widetilde{t}_t + u_{\widetilde{x}_i} (\widetilde{x}_i)_t + \sum_{i=1}^{n} b_i [u_{\widetilde{t}} \widetilde{t}_{x_i} + u_{\widetilde{x}_1} (\widetilde{x}_1)_{x_i} + \ldots + u_{\widetilde{x}_n} (\widetilde{x}_n)_{x_i}] \\ &= \Big(\widetilde{t}_t + \sum_{i=1}^{n} b_i \widetilde{t}_{x_i} \Big) u_{\widetilde{t}} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{\widetilde{x}_i} - \sum_{i=1}^{n} b_i u_{\widetilde{x}_i} \\ &= \Big(\widetilde{t}_t + \sum_{i=1}^{n} b_i \widetilde{t}_{x_i} \Big) u_{\widetilde{t}} \end{aligned}$$

Τώρα επιλέγουμε τη συντεταγμένη $\widetilde{t}$. Για ευκολία θέτουμε $\widetilde{t} = t$, δηλ. $\widetilde{t}_t = 1$, $\widetilde{t}_{x_i} = 0$. Άρα η εξίσωση μεταφοράς γίνεται $u_{\widetilde{t}} = 0$, που σημαίνει ότι η $u = h(\widetilde{x})$. Για $t = 0$ έχουμε $f(x) = h(-x)$, άρα $u(x,t) = f(-\widetilde{x}) = f(x - bt)$.

Παρατήρηση 2.4. *Για να είναι η αλλαγή συντεταγμένων καλά ορισμένη πρέπει να ελέγξουμε ότι η ορίζουσα της Ιακωβιανής είναι μη μηδενική:*

$$\left| \frac{\partial(\widetilde{x}, \widetilde{t})}{\partial(x,t)} \right| = \begin{vmatrix} (\widetilde{x}_1)_t & (\widetilde{x}_1)_{x_1} & \ldots & (\widetilde{x}_1)_{x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\widetilde{x}_n)_t & (\widetilde{x}_n)_{x_1} & \ldots & (\widetilde{x}_n)_{x_n} \\ \widetilde{t}_t & \widetilde{t}_{x_1} & \ldots & \widetilde{t}_{x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \neq 0$$

2.4 Αλλαγή συντεταγμένων

Συνεχίζουμε με την πιο γενική μορφή της γραμμικής εξίσωσης (2.2) και περιοριζόμαστε στη διάσταση $n = 1$ για απλότητα. Θεωρούμε το ακριβώς ανάλογο σύστημα για τις χαρακτηριστικές:

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = a \\ \frac{dx}{ds} = b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad a dx - b dt = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι θεωρητικά επιλύσιμη και μας οδηγεί στην επιλογή της νέας συντεταγμένης $\widetilde{x}$:

$$d\widetilde{x} = a dx - b dt \quad \Rightarrow \quad \frac{d\widetilde{x}}{dx} = a, \quad \frac{d\widetilde{x}}{dt} = -b.$$

Στη συνέχεια η επιλογή της άλλης συντεταγμένης $\widetilde{t}$ γίνεται με στόχο την απλούστευση της τελικής εξίσωσης. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} a u_t + b u_x &= a \Big(u_{\widetilde{x}} \widetilde{x}_t + u_{\widetilde{t}} \widetilde{t}_t \Big) + b \Big(u_{\widetilde{x}} \widetilde{x}_x + u_{\widetilde{t}} \widetilde{t}_x \Big) \\ &= a \Big(-b u_{\widetilde{x}} + u_{\widetilde{t}} \widetilde{t}_t \Big) + b \Big(a u_{\widetilde{x}} + u_{\widetilde{t}} \widetilde{t}_x \Big) \\ &= (a \widetilde{t}_t + b \widetilde{t}_x) u_{\widetilde{t}} \end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση (2.2) γίνεται

$$(a\widetilde{t}_t + b\widetilde{t}_x)u_{\widetilde{t}} + cu = d.$$

Η τελευταία είναι μια ΣΔΕ ως προς την μεταβλήτη $\widetilde{t}$, η οποία επιλύνεται με ολοκληρωτικούς παράγοντες. Τέλος, υπενθυμίζουμε ότι η επιλογή των νέων συντεταγμένων $\widetilde{x}, \widetilde{t}$ πρέπει να ικανοποιεί

$$\left|\frac{\partial(\widetilde{x},\widetilde{t})}{\partial(x,t)}\right| \neq 0,$$

ώστε η αλλαγή αυτή να είναι, τοπικά τουλάχιστον, αμφιδιαφόριση.

Παράδειγμα 2.5. *Για την εξίσωση*

$$xtu_t + t^2u_x - xu = xt,$$

ξεκινούμε με τις χαρακτηριστικές:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2}{xt} = \frac{t}{x} \quad \Rightarrow \quad xdx - tdt = 0 \quad \Rightarrow \quad \widetilde{x} = \frac{x^2 - t^2}{2}.$$

Παρατηρούμε εδώ ότι τη βολική απαλοιφή στο κλάσμα b/a*. Άρα οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι υπερβολές. Για ευκολία διαλέγουμε* $\widetilde{t} = t$ *και ελέγχουμε ότι*

$$\left|\frac{\partial(\widetilde{x},\widetilde{t})}{\partial(x,t)}\right| = \begin{vmatrix} x & -t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = x,$$

το οποίο δεν μηδενίζεται σε χωρία που δεν περιέχουν τον άξονα t*, π.χ. στο* $[1,+\infty)\times[0,+\infty)$*. Από τον κανόνα αλυσίδας, όπως στο θεωρητικό επιχείρημα, η παραπάνω εξίσωση μετατρέπεται στην*

$$\begin{aligned} & xt\widetilde{u}_{\widetilde{t}} - xu = xt \quad \Rightarrow \quad \widetilde{t}u_{\widetilde{t}} - u = \widetilde{t} && (x \neq 0) \\ \Rightarrow \quad & \partial_{\widetilde{t}}\Big(\frac{u_{\widetilde{t}}}{\widetilde{t}}\Big) = \frac{1}{\widetilde{t}} \quad \Rightarrow \quad u_{\widetilde{t}} = \widetilde{t}h(\widetilde{x}) + \widetilde{t}\log\widetilde{t} \quad \Rightarrow \quad u = th\Big(\frac{x^2-t^2}{2}\Big) + t\log t, \end{aligned}$$

όπου $h \in C^1(\mathbb{R})$.

2.5 Η μέθοδος των χαρακτηριστικών

Η αφετηρία του επιχειρήματος είναι ξανά οι χαρακτηριστικές $\gamma(s) = (x(s), t(s))$:

$$\begin{cases} t'(s) = a(x(s), t(s)) \\ x'(s) = b(x(s), t(s)) \end{cases},$$

μόνο που τώρα θέτουμε

$$z(s) = u \circ \gamma(s) \quad \Rightarrow \quad z' = au_t + bu_x = d - cz,$$

το οποίο είναι επίσης ΣΔΕ στην μεταβλητή s.

Παράδειγμα 2.6. *Δίνεται το ΠΑΤ*

$$\begin{cases} -x^2u_t + xtu_x - tu = xt & \textit{στο} \quad U = \{(x,t) : x, t > 0\} \\ u = g & \textit{στη} \quad \Gamma = \{t = 0, x > 0\}, \end{cases}$$

όπου $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ *δοσμένη συνάρτηση. Το σύστημα χαρακτηριστικών παίρνει την μορφή*

$$\begin{cases} t' = -x^2 \\ x' = xt \\ z' = tz + xt \end{cases}$$

Οι εξισώσεις για τις χαρακτηριστικές οδηγούν στη σχέση

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x} \quad \Rightarrow \quad tdt + xdx = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 + x^2 = \textit{σταθ.}$$

Άρα πρόκειται για κύκλους με κέντρο το μηδέν, δηλ. τα τόξα που περιέχονται στο U. *Παρατηρούμε ότι κάθε σημείο* (x,t) *στο* U *ενώνεται με τη* Γ *στο* $(\sqrt{x^2+t^2},0)$ *μέσω μιας χαρακτηριστικής.*

Από τη 2η και 3η εξίσωση του συστήματος των χαρακτηριστικών παίρνουμε

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z}{x}+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(\frac{z}{x})=\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad z=x\log x+x\log C,$$

όπου C *σταθερά που προσδιορίζεται από την αρχική συνθήκη, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι χαρακτηριστικές (κύκλοι) βρίσκουν τη* Γ. *Πράγματι, κατά μήκος μιας χαρακτηριστικής έχουμε*

$$\begin{cases} z(x)=u(x,t(x)) \\ u(\sqrt{x^2+t^2},0)=g(\sqrt{t^2+x^2}) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z(\sqrt{t^2+x^2})=g(\sqrt{t^2+x^2})$$

Βάζοντας την προηγούμενη σχέση στον τύπο της z *έχουμε:*

$$g(\sqrt{t^2+x^2})=\sqrt{t^2+x^2}\log\sqrt{t^2+x^2}+\sqrt{t^2+x^2}\log C$$

Άρα, καταλήγουμε στον τύπο:

$$u(x,t)=x\log x+x\left(\frac{g(\sqrt{t^2+x^2})}{\sqrt{t^2+x^2}}-\log\sqrt{t^2+x^2}\right).$$

Παρατήρηση 2.7. *Η εφαρμοσιμότητα της μεθόδου των χαρακτηριστικών εξαρτάται από κατά πόσο οι χαρακτηριστικές συναντούν την αρχική καμπύλη* Γ. *Για αυτό το λόγο, η* Γ *πρέπει να είναι μη χαρακτηριστική, δηλ. όχι η ίδια χαρακτηριστική καμπύλη.*

2.6 Η επίδραση της μη γραμμικότητας

Η προσέγγιση μέσω χαρακτηριστικών είναι εξίσου χρήσιμη στην μη γραμμική περίπτωση:

$$\begin{aligned} t'&=a \\ x'&=b \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για την ημιγραμμική εξίσωση (2.3), οι συντελεστές $a(x,t), b(x,t)$ δεν εξαρτώνται από τη λύση u και επομένως οι χαρακτηριστικές μπορούν να βρεθούν ξεχωριστά, όπως ακριβως και στην γραμμική περίπτωση. Έτσι καταλήγουμε στην μη γραμμική ΣΔΕ:

$$z'+c(z,x,t)=0, \quad \text{όπου} \quad z(s)=u(x(s),t(s)).$$

Τουναντίον, για την οιονεί γραμμική εξίσωση, οι χαρακτηριστικές εξαρτώνται από τη λύση και πρέπει το σύστημα να λυθεί ταυτόχρονα

$$\begin{cases} t'=a(z,x,t) \\ x'=b(z,x,t) \\ z'=-c(z,x,t) \end{cases}$$

Παράδειγμα 2.8 (Ημιγραμμικό). *Θέλουμε να βρούμε τη γενική λύση της εξίσωσης*

$$tu_t+xu_x=xe^{-u}$$

Το σύστημα των χαρακτηριστικών δίνει

$$\begin{cases} t'=t \\ x'=x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t=t(0)e^s \\ x=x(0)e^s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t=Cx, \quad C=\frac{t(0)}{x(0)}.$$

Έπειτα παίρνουμε $z'=xe^{-z}$. *Διαιρώντας με την εξίσωση για το* x' *έχουμε*

$$\frac{dz}{dx}=e^{-z} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(e^z)=1 \quad \Rightarrow \quad e^z=x+C_1 \quad \Rightarrow \quad z=\log(x+C_1),$$

όπου η C_1 *είναι σταθερά κατά μήκος των χαρακτηριστικών. Εφόσον αυτές είναι οι παραπάνω ευθείες, η* C_1 *μπορεί να είναι οποιαδήποτε συνάρτηση* $h(t/x)$:

$$z = \log(x + h(\frac{t}{x})),$$

με την υπόθεση ότι $x \neq 0$. *Για να καλύψουμε την περίπτωση* $x = 0$, *δηλ. σημεία με* $x(0) = 0, t(0) \neq 0$, *τότε λύνουμε τη ΣΔΕ*

$$tu_t = 0 \quad \Rightarrow \quad u(t, 0) = C_2.$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι η λύση είναι σταθερή κατά μήκος του άξονα t.

Παράδειγμα 2.9 (Οιονεί γραμμικό). *Θέλουμε να βρούμε τη λύση του ΠΑΤ*

$$\begin{cases} u_t + \log(t + u)u_x = -1, & \text{στο} \quad \mathbb{R} \times [0, +\infty) \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Το σύστημα των χαρακτηριστικών είναι

$$\begin{cases} t' = 1 \\ x' = \log(t + z) \\ z' = -1 \end{cases}$$

Από την 1η και 3η εξίσωση παίρνουμε

$$\frac{dz}{dt} = -1 \quad \Rightarrow \quad z + t = C_1$$

Επομένως, η 2η εξίσωση γίνεται $x' = \log C_1$. *Συνδυάζοντας την με την πρώτη έχουμε*

$$\frac{dx}{dt} = \log C_1 \quad \Rightarrow \quad x = t \log C_1 + C_2 = t \log(z + t) + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = x - t \log(z + t),$$

όπου τα C_1, C_2 *είναι σταθερές κατά μήκος της χαρακτηριστικής που περνάει από το* (x, t):

$$\gamma(t) = (x(t), t) = (\log C_1, 1)t + (C_2, 0)$$

Για $t = 0$, *αυτη διέρχεται από το* $(C_2, 0)$. *Άρα, έχουμε*

$$z(0) = u(x(0), 0) = g(C_2) = g(x - t \log(z + t))$$

Άπο την άλλη μεριά, $z(0) = C_1 = z + t$, *άρα*

$$u + t = g(x - t \log(u + t)).$$

Η τελευταία σχέση προσδιορίζει τη λύση u *με έμμεσο τρόπο που εξαρτάται από την αρχική συνθήκη.*

2.7 Κρουστικά κύματα

Συναντώνται σε πολλά παραδείγματα στη φύση. Χαρακτηριστικό είναι το κρουστικό κύμα γύρω από την τροχιά μίας σφαίρας στον αέρα (Σχήμα 3). Είναι απόρροια της συνάντησης χαρακτηριστικών, το οποίο μπορεί να συμβεί μόνο στις οιονεί γραμμικές εξισώσεις. Το πιο απλό παράδειγμα είναι η εξίσωση Burgers:

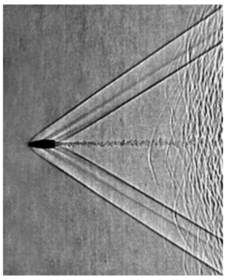
$$u_t + uu_x = 0. \tag{2.8}$$

Η μέθοδος των χαρακτηριστικών δίνει:

$$\begin{cases} t' = 1 \\ x' = z \\ z' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = s + t_0 \\ x = u(x_0, t_0)s + x_0 \\ z = u(x_0, t_0) \end{cases} \tag{2.9}$$

Άρα η u είναι σταθερή κατά μήκος της χαρακτηριστικής που διέρχεται από το τυχαίο σημείο (x_0, t_0). Η τελευταία πρόκειται για ευθεία παράλληλη στο διάνυσμα $(u(x_0, t_0), 1)$, η οποία τέμνει τον άξονα x για $s = -t_0$:

$$t = 0, \qquad x = x_0 - u(x_0, t_0)t_0 \tag{2.10}$$



Σχήμα 3: Τροχιά σφαίρας στον αέρα.

Παρατήρηση 2.10. *Για $t_0 = 0$, η χαρακτηριστική είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(x_0, 0)$ με κλίση $1/g(x_0)$. Αν τώρα πάρουμε ένα άλλο σημείο $(x_1, 0)$ με $x_1 > x_0$ και τυγχάνει $0 < g(x_1) < g(x_0)$, τότε η κλίση της αντίστοιχης ευθείας/χαρακτηριστικής είναι μεγαλύτερη. Άρα οι δύο χαρακτηριστικές τέμνονται σε κάποια μελλοντική στιγμή. Το φαινόμενο αυτό αντιστοιχεί στη σύγκρουση σωματιδίων που ακολουθούν χαρακτηριστικές τροχές και δημιουργούν ένα κρουστικό κύμα.*

Ας θεωρήσουμε λοιπόν το ΠΑΤ

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \quad \text{στο} \quad \mathbb{R} \times [0, +\infty) \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases} \tag{2.11}$$

Τότε με βάση τους τύπους (2.9), (2.10), κατά μήκος της χαρακτηριστικής που διέρχεται από το (x_0, t_0) παίρνουμε

$$u(x, t) = u(x_0 - u(x_0, t_0)t_0, 0) = g(x_0 - u(x_0, t_0)t_0)$$

Άρα και στο (x_0, t_0):

$$u(x_0, t_0) = g(x_0 - u(x_0, t_0)t_0)$$

Εφόσον το σημείο (x_0, t_0) είναι τυχαίο, έπεται ότι

$$u(x, t) = g(x - u(x, t)t), \tag{2.12}$$

για κάθε (x, t) με $x, t > 0$.

Παρατήρηση 2.11. *Παραγωγίζοντας την (2.12) ως προς x παίρνουμε*

$$u_x = g'(x - u(x, t)t)(1 - u_x t) \quad \Rightarrow \quad u_x = \frac{g'(x - u(x, t)t)}{1 + g'(x - u(x, t)t)t}. \tag{2.13}$$

Επομένως παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που η $g' < 0$, δηλ. η g είναι φθίνουσα, ο παρανομαστής στην (2.13) μπορεί να απειριστεί μελλοντικά, π.χ. στην περίπτωση $g(x) = -x$. Στην αντίθετη περίπτωση που η $g' > 0$, η λύση παραμένει C^1 για κάθε $t > 0$.

Παράδειγμα 2.12. *Θεωρούμε το ΠΑΤ (2.11) με*

$$g(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 2 - x, & x \in [0, 1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Η g είναι τμηματικά C^1 με παράγωγο:

$$g'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -1, & x \in (0, 1) \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

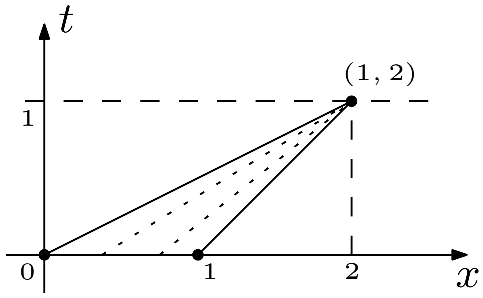
Από τον τύπο (2.9), έχουμε ότι οι χαρακτηριστικές που αρχίζουν από σημεία $(x_0, 0)$ είναι οι ευθείες

$$x = g(x_0)t + x_0 = \begin{cases} 2t + x_0, & x_0 < 0 \\ (2 - x_0)t + x_0, & x_0 \in [0, 1] \\ t + x_0, & x_0 > 1 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι για $x_0 < 0$ *οι χαρακτηριστικές είναι παράλληλες ευθείες με κλίση* $1/2$, *όπως και για* $x_0 > 1$ *με κλίση* 1. *Οι οριακές ευθείες σε κάθε περίπτωση που διέρχονται από τα* $(0,0)$, $(1,0)$ *είναι οι*

$$t = \frac{1}{2}x, \qquad t = x - 1$$

και τέμνονται στο $(2,1)$. *Επιπλέον, όλες οι ενδιάμεσες ευθείες για* $x_0 \in (0,1)$ *διέρχονται επίσης από*



Σχήμα 4: Οι χαρακτηριστικές τέμνονται στο $(2,1)$.

το $(2,1)$ *(Σχήμα 4). Η χρονική στιγμή* $t = 1$ *που συμβαίνει η πρώτη συνάντηση χαρακτηριστικών λέγεται χρόνος θράυσης.*

Παρατήρηση 2.13. *Μέχρι το σχηματισμό κρουστικού κύματος, δηλ. το χρόνο θραύσης* t_*, *η λύση παραμένει* C^1. *Χρειάζεται περαιτέρω ανάλυση, που δε θα κάνουμε εδώ, για να ερμηνευτεί η* u *ως "ασθενής" λύση πέραν του* $t = t_*$ *(βλέπε Κεφάλαια 1.7-1.8 στο βιβλίο).*

2.8 Ασκήσεις

Άσκηση 1. *Να βρείτε τις γενικές λύσεις των εξισώσεων*

$$3u_t + u_x - u = 0$$
$$4u_t - 2u_x = e^{x+3t} - 5u$$

Άσκηση 2. *Να λυθεί το ΠΑΤ*

$$\begin{cases} (x^2+t^2)u_t + 2xtu_x = 0 & \textit{στο} \quad U = \{t > x\} \\ u(x,t) = e^{\frac{t}{x-t}} & \textit{στη} \quad \Gamma = \{t + x = 1\} \end{cases}$$

Άσκηση 3. *Να λυθεί το ΠΑΤ*

$$\begin{cases} u_t + u_x = u^2 & \textit{στο} \quad \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = g \end{cases}$$

Άσκηση 4. *Να λυθεί το ΠΑΤ*

$$\begin{cases} -(x+2tu)u_t + (t+2xu)u_x = \frac{x^2-t^2}{2}, & \textit{στο} \quad U = \{t > 0, x > 0\} \\ u = x, & \textit{στη} \quad \Gamma = \{t = 0, x > 0\} \end{cases}$$

Άσκηση 5. *Να λυθεί το ΠΑΤ*

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & \textit{στο} \quad \mathbb{R} \times (0,1) \\ u(x,0) = -x \end{cases}$$

Βρείτε τα σημεία όπου συναντιούνται οι χαρακτηριστικές.

3 Ταξινόμηση εξισώσεων 2ης τάξης

3.1 Διάσταση $n = 2$

3.2 Υψηλότερες διαστάσεις

3.3 Ασκήσεις

Άσκηση 1.

Άσκηση 2.

Άσκηση 3.

Άσκηση 4.

Άσκηση 5.