



ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ – ΙΟΥΝΙΟΣ 2019

1. Δείξτε ότι $6 \mid n^3 - n$, για κάθε $n \geq 2$. (1)
2. Σε ένα εστιατόριο ο κατάλογος περιέχει 20 τύπους πιάτων. Πόσες δυνατές παραγγελίες 12 πιάτων υπάρχουν αν:
 - (α') Κάθε πιάτο είναι διαφορετικό. (0,5)
 - (β') Όλα τα πιάτα είναι του ίδιου τύπου. (0,5)
 - (γ') Δεν υπάρχουν περιορισμοί. (0,5)
 - (δ') Υπάρχουν τουλάχιστον 4 πράσινες σαλάτες ή 4 χωριάτικες σαλάτες. (0,5)

Σημείωση: Στην παραγγελία δεν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία εμφανίζονται τα πιάτα.

3. Αποδείξτε με συνδυαστικό επιχείρημα την ταυτότητα

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^n \binom{i-1}{k-1}.$$

Υπόδ: Πόσα υποσύνολα μεγέθους k του $[n]$ υπάρχουν με i το μεγαλύτερο στοιχείο τους; (1)

4. Δίνεται ότι $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. Βρείτε κλειστό τύπο για την ακολουθία $a_k = 3a_{k-1} - 2a_{k-2}$ για $k \geq 2$, με αρχικές συνθήκες $a_0 = 2$ και $a_1 = 6$. (1,5)
5. Σχεδιάστε ή περιγράψτε ένα απλό γράφημα με τους παρακάτω βαθμούς κορυφών. Αν δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα, εξηγήστε το γιατί. Έπειτα εξηγήστε αν το γράφημα αυτό (όταν υπάρχει) έχει μονοπάτι ή κύκλο Euler.

(α') 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (0,5)

(β') $\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ φορές}}$ (0,5)

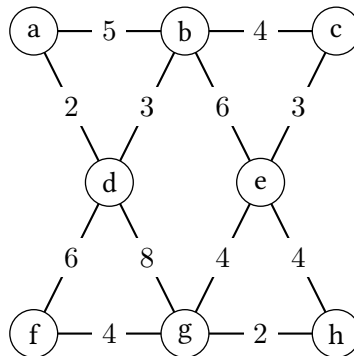
(γ') $\underbrace{2, \dots, 2}_{n \text{ φορές}}$ (0,5)

(δ') $\underbrace{n, \dots, n}_{2n \text{ φορές}}$ (0,5)

(ε') 4, 4, 3, 3, 2 (0,5)

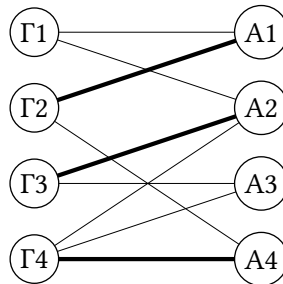
6. Έστω $F = (V, E)$ δάσος με n κορυφές και m δέντρα. Βρείτε το $|E|$. (1)

7. Βρείτε ένα ελάχιστο δέντρο που παράγει το παρακάτω γράφημα με τον αλγόριθμο του Kruskal.



Σημειώστε με κάποιο τρόπο τα βήματα του αλγόριθμου. (1)

8. Οι πελάτες ενός γραφείου συνοικεσίων και οι προτιμήσεις τους αποτυπώνονται στο παρακάτω διμερές γράφημα.



Ένας υπάλληλος αποφάσισε να κάνει το ταίριασμα Γ2-Α1, Γ3-Α2 και Γ4-Α4. Βρείτε ένα επαυξάνον μονοπάτι του ταίριασματος αυτού και χρησιμοποιήστε το ώστε να κατασκευάσετε ένα πλήρες ταίριασμα. (1)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

-
1. Ο αριθμός στην παρένθεση στο τέλος κάθε θέματος/ερωτήματος συμβολίζει την βαθμολογία του. Η μέγιστη βαθμολογία είναι 11 και άριστα είναι το 10.
 2. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2,5 ώρες και μπορείτε να αποχωρίσετε από την αίθουσα το νωρίτερο 30 λεπτά μετά την αρχή της εξέτασης.
 3. Κατά την διάρκεια της εξέτασης δεν επιτρέπεται να έχετε πάνω σας ή δίπλα σας τσάντες, σημειώσεις, βιβλία ή ηλεκτρονικές συσκευές (αριθμομηχανές, κινητά, ταμπλέτες, φορητούς υπολογιστές κτλ.).