ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - ΜΕΜ241 (ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2018-19)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ

3ο σετ ασκήσεων (Εισαγωγή στην θεωρία γραφημάτων)

Άσκηση 1. Από το Μ. Κολουντζάκης και Χ. Παπαχριστόδουλος, *Διακριτά Μαθηματικά*, δείτε τις ασκήσεις του Κεφαλαίου 5.

Άσκηση 2. Δείτε ξανά όλες τις ασκήσεις που διατυπώθηκαν (λυμένες και μη) στις παραδόσεις.

Άσκηση 3. Η *ακολουθία βαθμών* ενός γραφήματος είναι η ακολουθία των βαθμών των κορυφών ενός γραφήματος γραμμένοι κατά φθίνουσα σειρά. Βρείτε τις ακολουθίες βαθμών των γραφημάτων που έχουμε δει στο μάθημα.

Άσκηση 4. Βρείτε το πλήθος των ακμών και σχεδιάστε ένα γράφημα με ακολουθία βαθμών την

i. 4, 3, 3, 2, 2 και την
ii. 5, 2, 2, 2, 2, 1.

Άσκηση 5. Μια ακολουθία λέγεται *γραφηματική*, αν είναι η ακολουθία βαθμών ενός γραφήματος. Βρείτε κατά πόσο οι παρακάτω ακολουθίες είναι γραφηματικές. Αν ναι, σχεδιάστε ένα αντίστοιχο γράφημα.

i. 5, 4, 3, 2, 1, 0
ii. 2, 2, 2, 2, 2, 2
iii. 3, 3, 3, 2, 2, 2
iv. 1, 1, 1, 1, 1, 1
v. 5, 3, 3, 3, 3, 3
vi. 3, 3, 3, 3, 2
vii. 4, 4, 3, 2, 1
viii. 3, 2, 2, 1, 0
ix. 1, 1, 1, 1, 1

Άσκηση 6. Έστω $d_1, d_2, \ldots, d_n$ γραφηματική ακολουθία. Δείξτε ότι υπάρχει απλό γράφημα με κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_n$ τέτοιο ώστε $\deg(v_i) = d_i$ για $i = 1, 2, \ldots..., n$ και v_1 γειτονική με τις $v_2, \ldots, v_{d_1+1}$.

Υπόδειξη: Σκεφτείτε κατασκευαστικά.

Άσκηση 7. Έστω η ακολουθία $d_1, d_2, \ldots, d_n$ τέτοια ώστε $0 \leq d_{i+1} \leq d_i$. Δείξτε ότι η ακολουθία αυτή είναι γραφηματική αν και μόνο αν η ακολουθία $d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$, ενδεχομένως μετά από κατάλληλη αναδιάταξη των όρων ώστε να είναι φθίνουσα, είναι γραφηματική.

Άσκηση 8. Χρησιμοποιείστε την Άσκηση 7, ώστε να φτιάξετε έναν αναδρομικό αλγόριθμο που να ελέγχει κατά πόσο μια ακολουθία είναι γραφηματική ή όχι.

Άσκηση 9. Πόσα μη ισόμορφα απλά γραφήματα υπάρχουν

i. με 5 κορυφές και 3 ακμές και
ii. με 6 κορυφές και 4 ακμές;

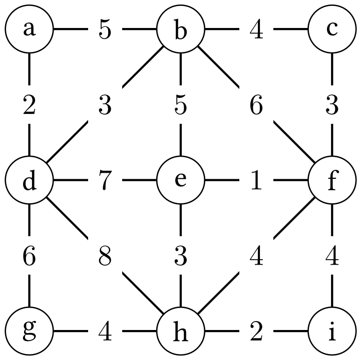
Άσκηση 10. Δείξτε ότι ένα συνεκτικό γράφημα n κορυφών έχει τουλάχιστον $n-1$ ακμές.

Άσκηση 11. Κατασκευάστε ένα κατάλληλο γράφημα ώστε να λύσετε το *πρόβλημα των ζηλιάρηδων συζύγων*: Δύο ετερόφυλα ζευγάρια βρίσκονται στην μια όχθη ενός ποταμού και προκειμένου να περάσουν απέναντι μπορούν να χρησιμοποιήσουν μόνο μια βάρκα που μεταφέρει μέχρι δύο άτομα, η οποία δεν μπορεί να περάσει απέναντι μόνη της. Οι άντρες των ζευγαριών είναι ζηλιάρηδες και δεν επιτρέπουν στην σύζηγό τους να βρίσκεται σε μια όχθη με τον άλλο άντρα χωρίς την παρουσία τους. Βρείτε τρόπο ώστε να περάσουν οι άνθρωποι αυτοί στην απέναντι όχθη.

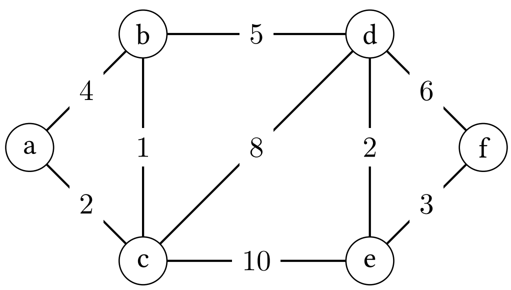
Άσκηση 12. Πόσα μη ισόμορφα δέντρα υπάρχουν

i. με 4 κορυφές και
ii. με 5 κορυφές;

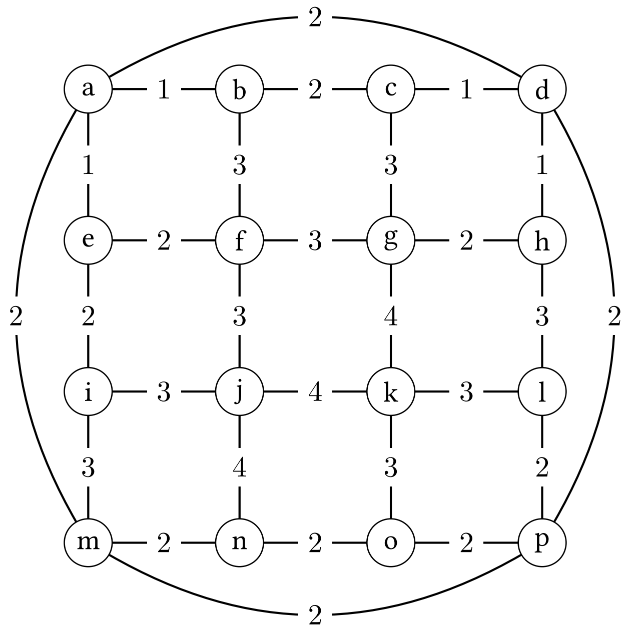
Άσκηση 13. Βρείτε ένα ελάχιστο δέντρο που παράγει το παρακάτω γράφημα, τόσο με τον αλγόριθμο του Prim, όσο και με τον αλγόριθμο του Kruskal.



Άσκηση 14. Χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο Floyd-Warshall, ώστε να βρείτε τις ελάχιστες αποστάσεις ανάμεσα σε όλα τα ζεύγη κορυφών του παρακάτω γραφήματος:



Άσκηση 15. Χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο Dijkstra για να βρείτε ένα ελάχιστο μονοπάτι από την κορυφή a στην κορυφή k και από την κορυφή e στην κορυφή l στο παρακάτω γράφημα:



Άσκηση 16. Σκεφτείτε μια παραλλαγή του αλγόριθμου Dijkstra, που να επιστρέφει τις ελάχιστες αποστάσεις από όλες τις κορυφές ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος με θετικά βάρη, προς μια δεδομένη κορυφή. Αποδείξτε την ορθότητα του αλγόριθμού σας.

Υπόδειξη: Δείτε την απόδειξη του αλγόριθμου Dijkstra.

Άσκηση 17. Χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο που κατασκευάσατε στην Άσκηση 16 για να βρείτε την ελάχιστη απόσταση της κορυφής a από όλες τις άλλες στο γράφημα της Άσκησης 13.