ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

«Γραμμική Άλγεβρα & Αναλυτική Γεωμετρία» (ΕΜ111) – Χειμερινό Εξάμηνο 2008-2009

Διδάσκων: Ι. Τσαγράκης

3^{ο} ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Πόσοι μεμονωμένοι πολλαπλασιασμοί χρειάζονται όταν ένας $m \times n$ πίνακας A πολλαπλασιάζεται: α) με ένα n-διάστατο διάνυσμα $\vec{x}$; β) με ένα $n \times p$ πίνακα B;

Άσκηση 2: Δώστε παραδείγματα 4×4 και υπολογίστε το ίχνος κάθε πίνακα για τις περιπτώσεις:
α) διαγώνιου πίνακα, β) άνω τριγωνικού πίνακα, γ) κάτω τριγωνικού πίνακα

Άσκηση 3: Εξετάστε αν καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής, και δώστε ένα αντιπαράδειγμα στις ψευδείς περιπτώσεις.
α) Αν η 1^{η} και η 3^{η} στήλη του Β είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την 1^{η} και 3^{η} στήλη του ΑΒ.
β) Αν η 1^{η} και η 3^{η} γραμμή του Β είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την 1^{η} και 3^{η} γραμμή του ΑΒ.
γ) Αν η 1^{η} και η 3^{η} γραμμή του Α είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την 1^{η} και 3^{η} γραμμή του ΑΒ.
δ) $(AB)^2 = A^2 B^2$.

Άσκηση 4: Το γινόμενο δύο κάτω τριγωνικών πινάκων είναι πάλι κάτω τριγωνικός. Δώστε ένα παράδειγμα 3×3 και εξηγήστε πως αυτό έπεται από τους νόμους του πολλαπλασιασμού πινάκων.

Άσκηση 5: Βρείτε παραδείγματα πραγματικών πινάκων 2×2, τέτοιων ώστε: α) $A^2 = -I$, β) $B^2 = 0$, με $B \neq 0$, γ) $CD = -DC$, με $CD \neq 0$, δ) $EF = 0$, χωρίς κανένα στοιχείο των E & F να είναι 0.

Άσκηση 6: Αν για κάθε πίνακα $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, ισχύει $AB = BA$ με $A \neq 0$, τότε ο A είναι πολλαπλάσιος του ταυτοτικού (μοναδιαίου) πίνακα. Αποδείξτε αυτήν την πρόταση για την περίπτωση που $n = 2$.

Άσκηση 7: Ποιοι από τους επόμενους πίνακες είναι ίσοι με $(A+B)^2$, για κάθε $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$;
α) $(B+A)^2$, β) $(A+B)(B+A)$, γ) $A(A+B)+B(A+B)$, δ) $A^2+AB+BA+B^2$, ε) $A^2+2AB+B^2$

Άσκηση 8: Εφαρμόστε απαλοιφή για να βρείτε τους παράγοντες L και U των πινάκων:

$$\text{α)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \text{β)} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \text{γ)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 9: Λύστε την εξίσωση $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, αναλύοντας την σε δύο τριγωνικές εξισώσεις, $Lc = b$ και $Ux = c$.

Άσκηση 10: Πώς θα μπορούσατε να παραγοντοποιήσετε τον πίνακα A σε ένα γινόμενο UL, δηλ. άνω τριγωνικού επί κάτω τριγωνικό; Θα είχε τους ίδιους παράγοντες με τον $A = LU$;

Άσκηση 11: Λύστε τα ακόλουθα συστήματα με απαλοιφή, κάνοντας εν ανάγκη εναλλαγή γραμμών:

$$\text{α)} \begin{cases} u + 4v + 2w = -2 \\ -2u - 8v + 3w = 32 \\ v + w = 1 \end{cases}, \qquad \text{β)} \begin{cases} v + w = 0 \\ u + v = 0 \\ u + v + w = 1 \end{cases}$$

Ποιοι πίνακες μεταθέσεων απαιτούνται;

Άσκηση 12: Βρείτε τις παραγοντοποιήσεις $PA = LDU'$ και επαληθεύστε τις, για

$$\alpha) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \beta) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 13: Ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών a, b, c οδηγούν σε εναλλαγές γραμμών και ποιες κάνουν τους ακόλουθους πίνακες ιδιόμορφους;

$$\alpha) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 8 & 3 \\ 0 & b & 5 \end{bmatrix}, \qquad \beta) \begin{bmatrix} c & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ & ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (ΕΜ-111)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ 3ου ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

α) Το γινόμενο $A\vec{X}$ είναι ένα m-διάστατο διάνυσμα. Έστω α_{ij} τα στοιχεία του πίνακα Α. Τότε κάθε συνιστώσα του $A\vec{X}$ υπολογίζεται ως εξής:

$$(A\vec{X})_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \ , \quad \text{με } i = 1, 2, \ldots m$$

δηλ. για κάθε συνιστώσα του $A\vec{X}$ απαιτούνται n πολλ/σμοί, οπότε για τις m συνιστώσες του απαιτούνται mn πολλ/σμοί.

β) Έστω α_{ij} τα στοιχεία του πίνακα Α και b_{ij} τα στοιχεία του πίνακα Β

Τότε τα στοιχεία του ΑΒ υπολογίζονται από τη σχέση: $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} b_{kj}$

με $i = 1, 2, \ldots m$ και $j = 1, 2, \ldots, p$

δηλ. για κάθε στοιχείο απαιτούνται n πολλ/σμοί, οπότε για τα mp στοιχεία του ΑΒ θα έχουμε mpn πολλ/σμούς.

ΑΣΚΗΣΗ 2

α) Διαγώνιος πίνακας: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$tr(A) = 2 - 3 + 1 + 5 = 5$

β) Άνω τριγωνικός πίνακας:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \quad \text{με } tr(B) = 4 + 6 - 2 + 1 = 9$$

γ) Κάτω τριγωνικός πίνακας:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 0 \\ 2 & 9 & -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \text{με } tr(\Gamma) = 7+3+6-4 = 12$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Έστω $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ και $B = [b_{ij}] \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$

α) Έχουμε ότι 1η & 3η στήλη του Β είναι ίδιες, δηλ.: $b_{k1} = b_{k3}$, $\forall\, k = 1,2,\ldots,n$

Άρα: $(AB)_{i1} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k1} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k3} = (AB)_{i3}$, $\forall\, i = 1,2,\ldots,m$

Επομένως, η πρόταση είναι αληθής.

β) Η 1η & 3η γραμμή του Β είναι ίδιες, δηλ.: $b_{1j} = b_{3j}$, $\forall\, j = 1,2,\ldots,p$

Για την 1η & 3η γραμμή του ΑΒ έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} (AB)_{1j} &= \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{kj} \\ (AB)_{3j} &= \sum_{k=1}^{n} a_{3k} b_{kj} \end{aligned}\right\} \quad (AB)_{1j} - (AB)_{3j} = \sum_{k=1}^{n} (a_{1k} - a_{3k}) b_{kj} \neq 0 \ (\text{γενικά})$$

δηλ. η πρόταση είναι ψευδής.

Π.Χ. $A = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 6 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 30 & -10 \\ 19 & -23 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$

γ) Η 1η & 3η γραμμή του Α είναι ίδιες, δηλ.: $\alpha_{1k} = \alpha_{3k}$, $\forall\ k = 1, 2, \ldots, n$

Άρα: $(AB)_{1j} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{1k} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{3k} b_{kj} = (AB)_{3k}$

Επομένως, η πρόταση είναι αληθής.

δ) $(AB)^2 - A^2B^2 = (AB)(AB) - (AA)(BB) = A(BA)B - A(AB)B =$

$= A\left[(BA)B - (AB)B\right] = A(BA - AB)B \neq 0$ γενικά

Π.Χ. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 14 & -6 \end{bmatrix}$, $(AB)^2 = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 14 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 14 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 120 \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B^2 = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ -20 & 36 \end{bmatrix}$, $A^2B^2 = \begin{bmatrix} 92 & 36 \\ -32 & 144 \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Έστω: $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

τότε: $AB = \begin{bmatrix} \alpha_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{21}b_{11} + \alpha_{22}b_{21} & \alpha_{22}b_{22} & 0 \\ \alpha_{31}b_{11} + \alpha_{32}b_{21} + \alpha_{33}b_{31} & \alpha_{32}b_{22} + \alpha_{33}b_{32} & \alpha_{33}b_{33} \end{bmatrix}$

Γενικά, αν $A = [\alpha_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ με

$\alpha_{ij} = 0$, $b_{ij} = 0$ για $i < j$

Έτσι, $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} b_{kj}$, με $\alpha_{ik} b_{kj} = 0$ αν $\{k > i$ ή $k < j\}$

δηλ. μη-μηδενικοί όροι $a_{ik}b_{kj} \neq 0$ (γενικά) αν $\{k \leq i$ και $k \geq j\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{j \leq k \leq i\}$, άρα για $j \leq i$. Επομένως:

$$(AB)_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=j}^{i} a_{ik}b_{kj} & , \text{όταν } j \leq i \\ 0 & , \text{όταν } j > i \end{cases}$$

Δηλ. και ο AB είναι κάτω τριγωνικός.

ΑΣΚΗΣΗ 5

α) Έστω $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, τότε $A^2 = -I \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & d^2+bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+d)b = 0 \Leftrightarrow \{b=0 \text{ ή } d=-a\} \\ (a+d)c = 0 \Leftrightarrow \{c=0 \text{ ή } d=-a\} \\ a^2+bc = -1 \\ d^2+bc = -1 \end{cases}$$

οι τιμές $b=0$ και $c=0$ απορρίπτονται γιατί οδηγούν σε $a^2 = d^2 = -1$ που δεν έχει πραγματικές ρίζες. Άρα, $\{d=-a$ και $a^2+bc=-1\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{d=-a \text{ και } c=-\frac{(1+a^2)}{b}\right\}$ με $b \neq 0$

δηλ. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{(1+a^2)}{b} & -a \end{bmatrix}$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$

π.χ. για $a=b=1$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

β) Έστω $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ με $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Τότε $B^2=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & d^2+bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+d)b=0 \Leftrightarrow \{ b=0 \text{ ή } d=-a \} \\ (a+d)c=0 \Leftrightarrow \{ c=0 \text{ ή } d=-a \} \\ a^2+bc=d^2+bc=0 \end{cases}$$

Αν $b=c=0$ τότε $a=d=0$, δηλ. $B=0$ η οποία απορρίπτεται

Αν $\{ d=-a \text{ και } [b\neq 0 \text{ ή } c\neq 0] \}$, τότε $a^2+bc=0 \Leftrightarrow a=\pm\sqrt{-bc}$ με $bc\leq 0$.

Επομένως, $B=\begin{bmatrix} \pm\sqrt{-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{-bc} \end{bmatrix}$, $\forall\ b\neq 0$ ή/και $c\neq 0$ με $bc\leq 0$

π.χ. $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

γ) Έστω $C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$ με $u,v,w,z \in \mathbb{R}$ και $c_{ij} \in \mathbb{R}$ για $i=1,2$ $j=1,2$

$$CD=-DC \Leftrightarrow CD+DC=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2c_{11}u+c_{12}w+c_{21}v & (c_{11}+c_{22})v+c_{12}u+c_{12}z \\ c_{21}u+(c_{22}+c_{11})w+c_{21}z & 2c_{22}z+c_{21}v+c_{12}w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2c_{11} & c_{21} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{11}+c_{22} & 0 & c_{12} \\ c_{21} & 0 & c_{11}+c_{22} & c_{21} \\ 0 & c_{21} & c_{12} & 2c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

με προφανή λύση $(u, v, w, z) = (0, 0, 0, 0)$, δηλ. $D = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow CD = 0$, οπότε απορρίπτεται.

Το σύστημα (1) έχει & μη-μηδενικές (άπειρες) λύσεις (όπως μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας απαλοιφή Gauss, ή όπως θα δούμε σε επόμενα μαθήματα, υπολογίζοντας την ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών) αν και μόνο αν $4(C_{11}+C_{22})^2(C_{11}C_{22}-C_{21}C_{12}) = 0$ (2)

Δηλ. $\forall\ C \in M_2(\mathbb{R})$ με την ιδιότητα (2), μπορεί να βρεθεί $D \in M_2(\mathbb{R})$ με $D \neq 0$ τ.ω. $CD = -DC$.

Έστω $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, τότε η (1) δίνει:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Απαλοιφή Gauss:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{\text{εναλλαγή}}{\longleftrightarrow} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ (-2) \\ \\ (+) \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ (-1) \\ \\ (+) \end{matrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

δηλ. $\left\{\begin{array}{l} u + z = 0 \\ 2v + w = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -u \\ w = -2v \end{array}\right.$

Επομένως, $D = \begin{bmatrix} u & v \\ -2v & -u \end{bmatrix}$, $\forall\ (u, v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Επίσης, θα πρέπει $CD \neq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v \\ -2v & -u \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2v & -u \\ 2u & 2v \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \{ u \neq 0$ ή/και $v \neq 0 \}$

Π.Χ. $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

δ) Έστω: $E = \begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix}$ και $F = \begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$

$EF = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha u + bw & \alpha v + bz \\ cu + dw & cv + dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Εκτός από την προφανή λύση $(u, v, w, z) = (0, 0, 0, 0)$, η οποία δεν γίνεται δεκτή από την εκφώνηση, κάθε σύστημα έχει μη-μηδενικές (άπειρες λύσεις) αν και μόνο αν $\alpha d - cb = 0$. Απόδειξη:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \alpha & b & 0 \\ c & d & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \leftarrow (+) \end{matrix} \begin{matrix} -\frac{c}{\alpha} \\ \end{matrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} \alpha & b & 0 \\ 0 & d - \frac{c}{\alpha} b & 0 \end{array}\right]$$ που έχει άπειρες λύσεις

αν και μόνο αν $d - \frac{c}{\alpha} b = 0 \underset{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} \alpha d - cb = 0$

Π.Χ. $E = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Σ' αυτήν την περίπτωση: $\left\{\begin{matrix} 2u+w=0 \\ 2v+z=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} w=-2u \\ z=-2v \end{matrix}\right.$

Άρα: $F=\begin{bmatrix} u & v \\ -2u & -2v \end{bmatrix}$, $u,v \in \mathbb{R}^*$ π.χ. $F=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Έστω $A=[\alpha_{ij}]$, $B=[b_{ij}] \in M_2(\mathbb{R})$

Έχουμε: $AB=BA \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{11}b_{11}+\alpha_{12}b_{21} & \alpha_{11}b_{12}+\alpha_{12}b_{22} \\ \alpha_{21}b_{11}+\alpha_{22}b_{21} & \alpha_{21}b_{12}+\alpha_{22}b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_{11}b_{11}+\alpha_{21}b_{12} & \alpha_{12}b_{11}+\alpha_{22}b_{12} \\ \alpha_{11}b_{21}+\alpha_{21}b_{22} & \alpha_{12}b_{21}+\alpha_{22}b_{22} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_{12}b_{21}=\alpha_{21}b_{12} \\ \alpha_{21}b_{12}=\alpha_{12}b_{21} \\ \alpha_{11}b_{12}+\alpha_{12}b_{22}=\alpha_{12}b_{11}+\alpha_{22}b_{12} \\ \alpha_{21}b_{11}+\alpha_{22}b_{21}=\alpha_{11}b_{21}+\alpha_{21}b_{22} \end{matrix}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \alpha_{12}b_{21}=\alpha_{21}b_{12} \\ \alpha_{21}b_{12}=\alpha_{12}b_{21} \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \{\alpha_{12}b_{21}=\alpha_{21}b_{12}, \forall b_{21},b_{12} \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow \{\alpha_{12}=\alpha_{21}=0\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_{12}=\alpha_{21}=0 \\ \alpha_{11}b_{12}+\alpha_{12}b_{22}=\alpha_{12}b_{11}+\alpha_{22}b_{12} \\ \alpha_{21}b_{11}+\alpha_{22}b_{21}=\alpha_{11}b_{21}+\alpha_{21}b_{22} \end{matrix}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_{12}=\alpha_{21}=0 \\ \alpha_{11}b_{12}-b_{12}\alpha_{22}=0 \\ \alpha_{22}b_{21}-b_{21}\alpha_{11}=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} (\alpha_{11}-\alpha_{22})b_{12}=0 & \forall\ b_{12} \in \mathbb{R} \\ (\alpha_{22}-\alpha_{11})b_{21}=0 & \forall\ b_{21} \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_{12}=\alpha_{21}=0 \\ \alpha_{22}=\alpha_{11} \end{matrix}\right. \quad \delta.\delta. \quad A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & \alpha_{11} \end{bmatrix}=\alpha_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\alpha_{11}I_2$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

α) $B+A = A+B \Rightarrow (B+A)^2 = (A+B)^2$

β) $(A+B)(B+A) = (A+B)(A+B) = (A+B)^2$

γ) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A(A+B) + B(A+B)$

δ) $(A+B)^2 = A(A+B) + B(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

ε) $(A+B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2) = (A^2 + AB + BA + B^2) -$

$- (A^2 + 2AB + B^2) = BA - AB \neq 0$ γενικά

Άρα: $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

ΑΣΚΗΣΗ 8

α) $\begin{matrix} -4 \\ (+) \end{matrix}\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & * & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right]$

$\underbrace{\quad}_{U} \quad \underbrace{\quad}_{L}$

Άρα: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

β) $\begin{matrix} -\frac{1}{3} \\ (+) \end{matrix} \quad \begin{matrix} -\frac{1}{3} \\ (+) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ (+) \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & * & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & * & * & 1 \end{array}\right] \rightarrow \begin{matrix} \\ -\frac{1}{4} \\ (+) \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & 2/3 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 8/3 & 1/3 & * & 1 \end{array}\right] \rightarrow$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 8/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{array}\right] \Bigg| \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/4 & 1 \end{array}\right]$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{U}$ $\qquad$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{L}$

Άρα: $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 8/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}$

γ) $\begin{matrix} (-1) \\ (+) \end{matrix}\!\!\begin{matrix} (-1) \\ \\ (+) \end{matrix}\!\!\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{array}\right] \Bigg| \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 1 \end{array}\right] \rightarrow \begin{matrix} \\ (-1) \\ (+) \end{matrix}\!\!\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \end{array}\right] \Bigg| \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & * & 1 \end{array}\right]$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \Bigg| \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{U}$ $\qquad$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{L}$

Άρα: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 9

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$L\vec{c}=\vec{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1η εξίσωση: $c_1 = 2$

2η εξίσωση $c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 \Rightarrow c_2 = -2$

3η εξίσωση $c_1 + c_3 = 2 \Rightarrow c_3 = 2 - c_1 \Rightarrow c_3 = 0$

$$U\vec{x}=\vec{c} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3η εξίσωση: $w = 0$

2η εξίσωση: $v + 2w = -2 \Rightarrow v = -2$

1η εξίσωση: $2u + 4v + 4w = 2 \Rightarrow u = 5$

δηλ. μοναδική λύση $(u, v, w) = (5, -2, 0)$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Εφαρμόζοντας απαλοιφή Gauss ξεκινώντας από την τελευταία γραμμή και από τα δεξιά προς τα αριστερά. Για παράδειγμα:

$$\begin{matrix} (+)\to \\ \\ \frac{-1}{3} \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (+)\to \\ \frac{-1}{3} \end{matrix} \left| \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right. \to \begin{matrix} (+)\to \\ \\ \frac{-1}{4} \end{matrix} \begin{bmatrix} 8/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 8/3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 1 & * & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right. \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 5/2 & 0 & 0 \\ 2/3 & 8/3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right.$$

L $\quad$ U

Άρα: $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/2 & 0 & 0 \\ 2/3 & 8/3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

όπου τώρα οι οδηγοί βρίσκονται στον L, και γενικά τα L και U θα είναι διαφορετικά από εκείνα της παραγοντοποίησης $A=LU$ (π.χ. συγκρίνετε τα παραπάνω L, U με εκείνα της Άσκησης 8β).

ΑΣΚΗΣΗ 11

α) $\overset{2}{\underset{(+)}{\downarrow\!\rightarrow}}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -2 \\ -2 & -8 & 3 & 32 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 28 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$ αναλλαγή $\rightarrow$

$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 28 \end{array}\right]$

Ανάδρομη αντικατάσταση:

3η εξίσωση: $7w=28 \Leftrightarrow w=4$

2η εξίσωση: $v+w=1 \Leftrightarrow v=1-w \Rightarrow v=-3$

1η εξίσωση: $u+4v+2w=-2 \Leftrightarrow u=-2-4v-2w \Rightarrow u=2$

Ο πίνακας που απαιτείται για την αναλλαγή της 2ης με την 3η γραμμή είναι $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

β) $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$ ← αναλλαγή → $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$ (-1) ↓ (+) → $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

Ανάδρομη αντικατάσταση:

3η εξίσωση: $w = 1$

2η εξίσωση: $v + w = 0 \Leftrightarrow v = -w \Rightarrow v = -1$

1η εξίσωση: $u + v = 0 \Leftrightarrow u = -v \Rightarrow u = 1$

Ο πίνακας που απαιτείται για την αναλλαγή της 1ης με τη 2η γραμμή είναι $P = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

ΑΣΚΗΣΗ 12

α) αναλλαγή $\left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right] \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 1 \end{array}\right. \rightarrow$

$\rightarrow$ (-2) 0 (+) (+) $\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right] \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \rightarrow$ (L) (P)

$\rightarrow$ -3 (+) $\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & * & 1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \rightarrow$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \Bigg| \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \Bigg| \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\quad}_{U} \qquad \underbrace{\quad}_{L} \qquad \underbrace{\quad}_{P}$$

$$U = DU' = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Άρα $PA = LDU' \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right] =$

$$= \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(Κάντε την επαλήθευση ☺)

β) $\overset{(-1)\ (-2)}{\underset{(+)\ \ (+)}{}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Bigg| \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 1 \end{array}\right]$

$\overset{\text{αντίθεση}}{\underset{}{}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Bigg| \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & * & 1 \end{array}\right]$

(Σημ. μπορούμε να δούμε κατευθείαν από τη 2η γραμμή ότι έχουμε ιδιομορφία, όμως για να δείξουμε τη μεθοδολογία συνεχίζουμε)

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Bigg| \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & * & 1 \end{array}\right] \Bigg| \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\quad}_{U} \qquad \underbrace{\quad}_{L} \qquad \underbrace{\quad}_{P}$$

Ιδιομορφία
$\nexists P$ τ.ω.
$PA = LU$

ΑΣΚΗΣΗ 13

α) $\begin{matrix}(-\alpha)\\(+)\end{matrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ \alpha & 8 & 3\\ 0 & b & 5\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 8-2\alpha & 3\\ 0 & b & 5\end{bmatrix}$

Αν $b=0$ & $8-2\alpha\neq 0$, τότε μη-ιδιόμορφος πίνακας

Αν $b=0$ & $8-2\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=4$, τότε ιδιόμορφος πίνακας

Αν $8-2\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=4$ και $b\neq 0$, τότε εναλλαγή γραμμών 2,3

Δίνει: $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & b & 5\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ μη-ιδιόμορφος.

β) Αν $c=0$, τότε $\begin{bmatrix}0 & 2\\ 6 & 4\end{bmatrix}$ ← εναλλαγή $\sim \begin{bmatrix}6 & 4\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ μη-ιδιόμορφος

Αν $c\neq 0$, τότε $\begin{bmatrix}c & 2\\ 6 & 4\end{bmatrix} \leftarrow -\frac{6}{c} \sim \begin{bmatrix}c & 2\\ 0 & 4-\frac{12}{c}\end{bmatrix}$

Αν $4-\frac{12}{c}=0 \Leftrightarrow c=3$, τότε $\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ ιδιόμορφος