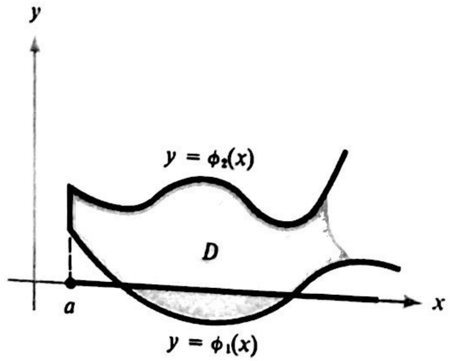
1. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα αν υπάρχουν.

(a) $\int_D \frac{1}{\sqrt{xy}} dA, D = [0,1] \times [0,1]$

(b) $\int_D \frac{1}{\sqrt{|x-y|}} dxdy, D = [0,1] \times [0,1]$
(ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Χωρίστε το D σε δύο κομμάτια.)

(c) $\int_D (y/x) dxdy$, το D φράσσεται από τις $x = 1, x = y$ και $x = 2y$.

(d) $\int_0^1 \int_0^{e^y} \log x dxdy$



Σχήμα 6.5.4 Ένα χωρίο D που δεν είναι φραγμένο.

2. (a) Σκεφτείτε με ποιόν τρόπο θα ορίζατε το $\int_D f dA$ αν το D είναι ένα μη φραγμένο χωρίο, για παράδειγμα, το σύνολο των (x,y) για τα οποία $a \le x < \infty$ και $\phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)$ όπου οι $\phi_1 \le \phi_2$ είναι δοσμένες (Σχήμα 6.5.4).

(b) Υπολογίστε το $\int_D xye^{-(x^2+y^2)} dxdy$ αν $x \ge 0, 0 \le y \le 1$.

3. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 2, ολοκληρώστε την e^{-xy} για $x \ge 0, 1 \le y \le 2$ με δύο τρόπους (υποθέστε ότι ισχύει το θεώρημα του Fubini) και δείξτε ότι

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = \log 2.$$

4. Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \int_0^a (x/\sqrt{a^2 - y^2}) dydx$$

υπάρχει, και υπολογίστε την τιμή του.

5. Εξετάστε αν το ολοκλήρωμα

$$\int_D \frac{x+y}{x^2 + 2xy + y^2} dxdy$$

υπάρχει στο $D = [0,1] \times [0,1]$. Αν υπάρχει, υπολογίστε την τιμή του.

6. Έστω f μία μη αρνητική συνάρτηση που μπορεί να μην είναι φραγμένη ή συνεχής στο σύνορο ενός στοιχειώδους χωρίου D. Έστω g μία συνάρτηση του ιδίου τύπου με $f(x,y) \le g(x,y)$, οπουδήποτε ορίζονται και οι δύο. Υ-

Scanned with CamScanner

ποθέτουμε ότι το $\int_D g(x,y)dA$ υπάρχει. Αποδείξτε (όχι αυστηρά) ότι απ' αυτό έπεται η ύπαρξη του $\int_D f(x,y)dA$.

7. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 6 δείξτε ότι το

$$\int_D \frac{\sin^2(x-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dydx$$

υπάρχει, όπου D είναι ο μοναδιαίος δίσκος $x^2+y^2 \le 1$.

8. Έστω f όπως στην Άσκηση 6 και g μία συνάρτηση τέτοια ώστε $0 \le g(x,y) \le f(x,y)$, οπουδήποτε ορίζονται και οι δύο. Υποθέτουμε ότι το $\int_D g(x,y)dA$ δεν υπάρχει. Αποδείξτε (όχι αυστηρά) ότι το $\int_D f(x,y)dA$ δεν μπορεί να υπάρχει.

9. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 8, δείξτε ότι το

$$\int_D \frac{e^{x^2+y^2}}{x-y}dydx$$

δεν υπάρχει, όταν D είναι το σύνολο των (x,y) με $0 \le x \le 1$ και $0 \le y \le x$.

***10.** Μία αλλαγή μεταβλητών μπορεί να μας βοηθήσει να βρούμε την τιμή ενός καταχρηστικού ολοκληρώματος πάνω στο μη φραγμένο χωρίο $\mathbf{R}^2$. Υπολογίστε το

$$\int_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

κάνοντας αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες. Μπορείτε να υπολογίσετε αυτό το ολοκλήρωμα απ' ευθείας; (Δείτε την Άσκηση 2, της Παραγράφου 6.5.)

***11.** Έστω W το πρώτο ογδοημόριο της μπάλας $x^2+y^2+z^2=a^2$, όπου $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$. Υπολογίστε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_W \frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/4}}{\sqrt{z+(x^2+y^2+z^2)^2}}dxdydz$$

κάνοντας αλλαγή μεταβλητών.

***12.** Έστω D το μη φραγμένο χωρίο που ορίζεται σαν το σύνολο των (x,y,z) με $x^2+y^2+z^2 \ge 1$. Κάνοντας αλλαγή μεταβλητών, υπολογίστε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 6

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα στις Ασκήσεις 1 ώς 8.

1. $\int_0^1\int_1^2\int_2^3 \cos[\pi(x+y+z)]dxdydz$

2. $\int_0^1\int_0^x\int_0^y (y+xz)dzdydx$

3. $\int\int\int_R (x^2+y^2+z^2)dxdydz$: R είναι το χωρίο που φράσσεται από τα επίπεδα $x+y+z=a$ (όπου $a>0$), $x=0, y=0$ και $z=0$.

4. $\int\int\int_W zdxdydz$: W είναι το χωρίο που φράσσεται από τα επίπεδα $x=0, y=0, z=0, z=1$ και τον κύλινδρο $x^2+y^2=1$ με $x \ge 0, y \ge 0$.

5. $\int\int\int_W x^2\cos zdxdydz$: W είναι το χωρίο που περικλείεται ανάμεσα στα επίπεδα $z=0, z=\pi, y=0, y=1, x=0$ και $x+y=1$.

6. $\int_0^2\int_0^x\int_0^{x+y} dzdydx$.

7. $\int\int\int_W (1-z^2)dxdydz$: W είναι η πυραμίδα με κορυφή το (0, 0, 1) και κορυφές της βάσης τα (0, 0), (1,0), (0, 1) και (1, 1).

8. $\int\int\int_W (x^2+y^2)dxdydz$: W είναι η πυραμίδα της Άσκησης 7.

9. Βρείτε τον όγκο ανάμεσα στις επιφάνειες $x^2+y^2=z$ και $x^2+y^2+z^2=2$.

10. Βρείτε τον όγκο που περικλείεται ανάμεσα στον κώνο $x^2+y^2=z^2$ και το επίπεδο $2z-y-2=0$.

11. Ανοίγουμε μια κυλινδρική οπή διαμέτρου 1 σε μια σφαίρα ακτίνας 2. Αν υποθέσουμε ότι ο άξονας του κυλίνδρου περνάει από το κέντρο της σφαίρας, βρείτε τον όγκο του στερεού που απομένει.

12. Έστω C_1 και C_2 δύο κύλινδροι με άπειρο μήκος, διάμετρο 2, και άξονες τους x και y

Scanned with CamScanner

το λογίσε το $\int_R$

αντίστοιχα. Βρείτε τον όγκο της περιοχής $C_1 \cap C_2$.

13. Βρείτε τον όγκο ανάμεσα στο $x/a + y/b + z/c = 1$ και τα επίπεδα συντεταγμένων.

14. Βρείτε τον όγκο του στερεού που ορίζεται από τις $z \le 6 - x^2 - y^2$ και $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$.

15. Θέλουμε να χωρίσουμε το τετράεδρο που ορίζεται από τις $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x+y+z \le 1$ σε n μέρη ίσου όγκου με επίπεδα παράλληλα στο επίπεδο $x+y+z=1$. Πώς πρέπει να κάνουμε τις τομές;

16. Υπολογίστε τα διαδοχικά ολοκληρώματα που ακολουθούν:

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^z\int_0^y xy^2z^3\,dxdydz$

(b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^y\int_0^{x/\sqrt{3}} \frac{x}{x^2+z^2}\,dzdxdy$

(c) $\displaystyle\int_1^2\int_1^z\int_{1/y}^2 yz^2\,dxdydz$

17. Βρείτε τον όγκο που έχει το "χωνάκι παγωτό" που ορίζεται από τις ανισότητες $x^2+y^2 \le \frac{1}{5}z^2, 0 \le z \le 5 + \sqrt{5 - x^2 - y^2}$.

18. Στα (a) και (d), κάντε την αλλαγή μεταβλητών που σας υποδεικνύεται. (Μην τα υπολογίσετε.)

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}(x^2+y^2)^{1/2}dxdydz$, κυλινδρικές συντεταγμένες

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} xyz\,dzdxdy$, κυλινδρικές συντεταγμένες

(c) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2\,dzdxdy$, σφαιρικές συντεταγμένες

(d) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} \rho^3 \sin 2\phi\, d\theta d\phi d\rho$, ορθογώνιες συντεταγμένες

19. Υπολογίστε το

$$\iiint_S \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

όπου S είναι το στερεό που περικλείεται ανάμεσα στις σφαίρες $x^2+y^2+z^2 = a$ και $x^2+y^2+z^2 = b^2$, όπου $a > b > 0$.

20. Γράψτε το διαδοχικό ολοκλήρωμα $\int_0^1\int_{1-x}^1\int_x^1 f(x,y,z)dzdydx$ σαν ένα ολοκλήρωμα πάνω σε ένα χωρίο του $\mathbf{R}^3$ και μετά ξαναγράψτε το με πέντε διαφορετικές διατάξεις των μεταβλητών.

21. (a) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty\int_0^y xe^{-y^3}dxdy$$

(b) Υπολογίστε το $\int\int_B (x^4 + 2x^2y^2 + y^4)dxdy$, όπου B είναι το κομμάτι του δίσκου με ακτίνα 2 και κέντρο το $(0,0)$, που περιέχεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

***22.** Στην Άσκηση 2 της Παραγράφου 6.5, συζητήσαμε για ολοκληρώματα πάνω σε μη φραγμένα χωρία. Χρησιμοποιώντας την αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες, δείξτε ότι $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{\pi}$. (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Fubini (μπορείτε να υποθέσετε ότι ισχύει) και δείξτε ότι

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

και χρησιμοποιήστε την Άσκηση 10 της Παραγράφου 6.5.)

***23.** Βρείτε το $\int_{\mathbf{R}^3} f(x,y,z)dxdydz$ όπου $f(x,y,z) = \exp[-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}]$.

24. Υπολογίστε το $\int\int\int_D (x^2+y^2+z^2)xyz\,dxdydz$ πάνω σε κάθε ένα από τα παρακάτω χωρία.

(a) τη σφαίρα $D = \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$

(b) το ημισφαίριο $D = \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 \le R^2$ και $z \ge 0\}$

(c) το χωρίο $D = \{(x,y,z) | x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ και $x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$

25. Έστω C το κωνικό χωρίο $\{(x,y,z) | \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\}$· υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int\int\int_C (1 + \sqrt{x^2+y^2})dxdydz$.

26. Έστω ρ, θ, ϕ σφαιρικές συντεταγμένες στον $\mathbf{R}^3$, και ας υποθέσουμε ότι κάποια επιφάνεια που περιβάλλει την αρχή των αξόνων περιγράφεται από μια συνεχή συνάρτηση $\rho = f(\theta, \phi)$. Δείξτε ότι ο όγκος που περικλείεται από την επιφάνεια είναι ίσος με

$$V = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}[f(\theta,\phi)]^3 \sin\phi\, d\phi d\theta.$$

Υποθέτουμε ότι (1) $f(0,\phi) = f(2\pi,\phi)$, (2) $f(\theta,\phi) > 0$ για $0 \le \phi \le \pi$ και $0 \le \theta \le 2\pi$

Scanned with CamScanner

και (3) οι τιμές $f(0,0)$ και $f(0,\pi)$ είναι σταθερές.

***27.** Υπολογίστε το $\int\int_B \exp[(y-x)/(y+x)]dxdy$ όπου B είναι το εσωτερικό του τριγώνου με κορυφές τα (0, 0), (0, 1) και (1, 0).

28. Έστω E το στερεό ελλειψοειδές $E = \{(x,y,z)|(x^2/a^2)+(y^2+b^2)+(z^2/c^2) \le 1\}$ όπου $a > 0, b > 0$ και $c > 0$. Υπολογίστε το

$$\int\int\int xyzdxdydz$$

(a) πάνω σε ολόκληρο το ελλειψοειδές, και

(b) πάνω στο κομμάτι του πρώτου ογδοημορίου:

$$x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1.$$

29. Έστω B το χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που ορίζεται από τις καμπύλες $xy = 1, xy = 3, x^2 - y^2 = 1$ και $x^2 - y^2 = 4$. Υπολογίστε το $\int\int_B (x^2+y^2)dxdy$.

30. Υποθέτουμε ότι η πυκνότητα ενός σφαιρικού στερεού ακτίνας R είναι ίση με $(1+d^3)^{-1}$ όπου d είναι η απόσταση από το κέντρο της σφαίρας. Βρείτε τη συνολική μάζα της σφαίρας.

31. Η πυκνότητα του υλικού ενός σφαιρικού κελύφους εσωτερικής ακτίνας 1 m και εξωτερικής ακτίνας 2 m είναι 0,4d^2g/cm^3, όπου d είναι η απόσταση από το κέντρο της σφαίρας σε μέτρα. Βρείτε τη συνολική μάζα του κελύφους.

32. Αν αφήσουμε το κέλυφος της Άσκησης 31 να πέσει σε ένα μεγάλο δοχείο με καθαρό νερό, θα επιπλεύσει; (Υποθέτουμε ότι η πυκνότητα του νερού είναι ακριβώς 1 g/cm^3.) Τί θα συμβεί σε περίπτωση εισροής;

33. Η θερμοκρασία των σημείων του κύβου $C = \{(x,y,z)| -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$ και $-1 \le z \le 1\}$ είναι $32d^2$, όπου d είναι η απόσταση από την αρχή των αξόνων.

(a) Ποιά είναι η μέση θερμοκρασία;

(b) Σε ποιά σημεία του κύβου η θερμοκρασία είναι ίση με τη μέση θερμοκρασία;

34. Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες βρείτε το κέντρο βάρους του χωρίου που ορίζεται από τις

$$y^2+z^2 \le \frac{1}{4}, \qquad (x-1)^2+y^2+z^2 \le 1, \qquad x \le 1.$$

35. Βρείτε το κέντρο μάζας του στερεού ημισφαιρίου

$$V = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \le a^2 \quad \text{και} \quad z \ge 0\}$$

αν η πυκνότητα είναι σταθερή.

***36.** Βρείτε το $\int_{\mathbf{R}^3} f(x,y,z)dxdydz$ όπου

$$f(x,y,z) = \frac{1}{[1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}]^{3/2}}.$$

***37.** Υποθέτουμε ότι D είναι το μη φραγμένο χωρίο του $\mathbf{R}^2$ που αποτελείται από το σύνολο των (x,y) με $0 \le x < \infty, 0 \le y \le x$. Έστω $f(x,y) = x^{-3/2}e^{y-x}$. Υπάρχει το καταχρηστικό ολοκλήρωμα $\int_D f(x,y)dxdy$;

38. Υπολογίστε το $\int\int_B e^{-x^2-y^2}dxdy$, όπου το B αποτελείται από εκείνα τα (x,y) που ικανοποιούν τις $x^2+y^2 \le 1$ και $y \le 0$.

***39.** Χρησιμοποιώντας τις ιδέες της Άσκησης 2 της Παραγράφου 6.5, υπολογίστε το $\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)dxdy$ όπου $f(x,y) = 1/(1+x^2+y^2)^{3/2}$. (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Υποθέστε ότι η αλλαγή μεταβλητών και το θεώρημα του Fubini ισχύουν για καταχρηστικά ολοκληρώματα.)

***40.** Αν ο κόσμος ήταν διδιάστατος, τότε σύμφωνα με τους νόμους της φυσικής το δυναμικό βαρύτητας μιας σημειακής μάζας θα ήταν ανάλογο με τον λογάριθμο της απόστασης από το σημείο. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, γράψτε ένα ολοκλήρωμα που να δίνει το δυναμικό βαρύτητας ενός δίσκου σταθερής πυκνότητας.

41. Η *ακαμψία* μιας ομοιόμορφης δοκού είναι το γινόμενο EI του συντελεστή E ελαστικότητας του Young της δοκού, επί την ροπή αδρανείας I της τομής της δοκού στο x ως προς έναν οριζόντιο άξονα l που περνάει από το κέντρο βάρους αυτής της τομής. Εδώ

$$I = \int_R\int [d(x,y)]^2 dxdy,$$

όπου $d(x,y)$ = η απόσταση του (x,y) από τον I και R =η τομή της δοκού που θεωρούμε.

(a) Υποθέτουμε ότι η τομή R είναι το ορθογώνιο $-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 2$ και l είναι ο άξονας x. Βρείτε την I.

(b) Υποθέτουμε ότι η τομή R είναι ένας κύκλος ακτίνας 4, και l είναι ο άξονας x. Βρείτε την I, χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες.

Scanned with CamScanner