7.2

(1) b) $F(x,y,z) = (x,y,z)$

$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \le t \le 2\pi$

$\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$

$F(t)\cdot\sigma'(t) = (\cos t, \sin t, 0)(-\sin t, \cos t, 0) =$

$= -\cos t \sin t + \cos t \sin t + 0 = 0$

(σελ. 359 εξήγηση)

άρα $\int = 0$

(2) α) $\int_\sigma x\,dy - y\,dx$, $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$
$0 \le t \le 2\pi$

$\int_0^{2\pi} \cos t \cdot \cos t + \sin t \cdot \sin t \; dt =$

$= 2\pi.$

(3) $F(x,y,z) = (x,y,z)$. Υπολογίστε το έργο που απαιτείται για να κινηθεί ένα σωματίδιο κατά μήκος της παραβολής $y = x^2$, $z = 0$ από $x = -1$ έως $x = 2$

$\sigma(t) = (t, t^2, 0)$, $t \in [-1, 2]$

$\sigma'(t) = (1, 2t, 0)$

$\vec{F}\cdot\sigma'(t) = (t, t^2, 0)\cdot(1, 2t, 0) = t + 2t^3$

Άρα $\int_{-1}^{2} t + 2t^3 \, dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2} \right]_{-1}^{2} =$

$= 2 + 8 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 10 - 1 = 9$

(5) $\int_a^b \|\sigma'\| \, dt = \ell$ (μήκος σ)

$\|F\| \leq M$. Ν.δ.ο $\left| \int_\sigma F \cdot ds \right| \leq M L$

$\int_\sigma F \, ds = \int_a^b F(\sigma(t)) \sigma'(t) \, dt$

Άρα $\left| \int_\sigma F \, ds \right| = \left| \int_a^b F(\sigma(t)) \sigma'(t) \, dt \right|$

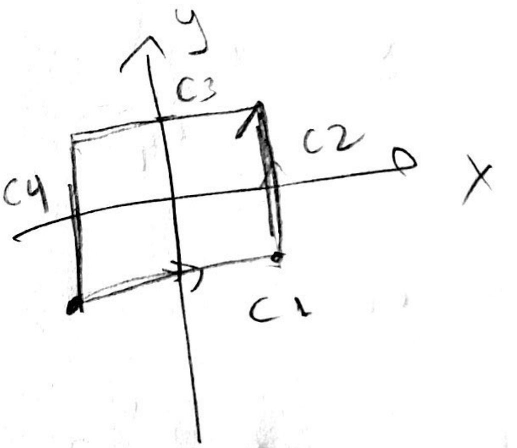
$\leq \int_a^b |F(\sigma(t)) \sigma'(t)| \, dt \underset{\text{Schwartz}}{\overset{\text{Cauchy}}{\leq}} \int_a^b \|F(\sigma(t))\| \|\sigma'(t)\| \, dt \leq$

$\leq \int_a^b M \cdot \|\sigma'(t)\| \, dt = M \underbrace{\int_a^b \|\sigma'(t)\| \, dt}_{\text{μήκος } \sigma.} =$

$= M \cdot L$

1) $F = (z^3 + 2xy,\ x^2,\ 3xz^2)$

Νδο το ολοκλήρωμα του F πανω στην περίμετρο του μοναδιαίου τετραγώνου με κορυφές τα $(\pm 1, \pm 1, 1)$ είναι 0.



$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{αρχή } M_1(x_1, y_1, z_1) \text{ τέλος } M_2(x_2, y_2, z_2) \\ x(t) = t x_2 + (1-t) x_1 \\ y(t) = t y_2 + (1-t) y_1 \\ z(t) = t z_2 + (1-t) z_1, \quad t \in [0,1] \end{array}}$$

C_1:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = t + (1-t)(-1) = t - 1 + t = 2t - 1 \\ y(t) = -t + (1-t)(-1) = -1 \\ z(t) = 1t + (1-t)1 = 1 \end{array}\right\} t \in [0,1]$$

$\sigma_1(t) = (2t-1, -1, 1)$

C_2: $x(t) = t + (1-t) = 1$

$y(t) = t + (1-t)(-1) = t - 1 + t = 2t - 1$

$z(t) = 1$

$\sigma_2(t) = (1, 2t-1, 1)$

C_3: $x(t) = -t + (1-t) = 1 - 2t$

$y(t) = t + (1-t) = 1$

$z(t) = 1$

$\sigma_3(t) = (1-2t, 1, 1)$

C_4: $x(t) = -t + (1-t)(-1) = -1$

$y(t) = -t + (1-t) = 1 - 2t$

$z(t) = 1$

$F = (z^2 + 2xy,\ x^2,\ 3xz^2)$

$\sigma_4(t) = (-1,\ 1-2t,\ 1)$

$$I = \int_C F(\sigma(t))\,\sigma'(t)\,dt = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$$

$$I_1 = \int_0^1 (1+2(2t-1),\ (2t-1)^2,\ 6t-3)(-2,0,0)\,dt =$$

$$= \int_0^1 2 - 4(2t-1)\,dt = \int_0^1 2 - 8t + 4\,dt = \left[6t - \frac{8t^2}{2}\right]_0^1 = 2$$

$$I_2 = \int_0^1 (1+2(2t-1),\ 1,\ 3)\cdot(0,2,0)\,dt = 2$$

$$I_3 = \int_0^1 (1+2(1-2t),\ (1-2t)^2,\ 3-6t)\cdot(-2,0,0)\,dt =$$

$$= \int_0^1 -2(1+2-4t)\,dt = \left[-6t + \frac{8t^2}{2}\right]_0^1 = -2$$

$$I_4 = \int_0^1 (1-2(1-2t),\ 1,\ -3)(0,-2,0)\,dt = -2$$

$\varphi \alpha$ $\quad I = 0$

6) $\nabla f(x,y,z) = (2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2})$

$f(0,0,0)=5$. Βρειτ $f(1,1,2)$

16

Ψαχνω f τ.ω.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyze^{x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = ze^{x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = ye^{x^2}$

$\downarrow$

$f(x,y,z) =$

$= yze^{x^2} + g(y,z)$

Αρα $\frac{\partial f}{\partial y} = ze^{x^2} + \frac{\partial g}{\partial y} = ze^{x^2} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0$

αρα $g(y,z) = h(z)$

αρα $f(x,y,z) = yze^{x^2} + g(y,z) =$

$= yze^{x^2} + h(z)$

$\frac{\partial f}{\partial z} = ye^{x^2} + h'(z) = ye^{x^2} \Rightarrow h(z) = c$

αρα $h'(z) = 0$

αρα $f(x,y,z) = yze^{x^2} + c$

$f(0,0,0) = 5 = c$

αρα $f(x,y,z) = yze^{x^2} + 5$

αρα $f(1,1,2) = 2e+5$

(αλλιως βρισκω καμπυλη πχ $(t,t,2t)$ ...)

(17) $F(x,y,z) = \dfrac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(xi+yj+zk)$

Νδο οτι το εργο κατα την μετακινηση απο το (x_1,y_1,z_1) στο (x_2,y_2,z_2) εξαρταται μονο απο τα R_1, R_2 ακτινες

Εστω $\sigma(t)$ καμπυλη με $\sigma(t_1) = (x_1,y_1,z_1)$ και $\sigma(t_2) = (x_2,y_2,z_2)$

$$\sigma'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(xi+yj+zk)\left(\frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k\right)dt$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\frac{d}{dt}\frac{(x^2+y^2+z^2)}{2}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\,dt =$$

$$= (x_2^2+y_2^2+z_2^2)^{-1/2} - (x_1^2+y_1^2+z_1^2)^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}$$

$\sigma : [\alpha, b] \to R^3$, $\sigma'(t) \neq 0$. κανονική

$f(x) = \int_\alpha^x \|\sigma'(t)\| dt$ 19

α) df/dx ;

$\frac{df}{dx} = \|\sigma'(x)\|$ από Θεμ. Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

β) σ : κανονική

$\frac{df}{dx} = \|\sigma'(x)\| > 0$ παντού στο $[\alpha, b]$

Από Θεώρημα Αντιστροφής η $f(x)$ έχει μια αντίστροφο $g = g(f(x))$

c) λόγω θ. αντ.

$\frac{df}{ds}(g(s)) \frac{dg}{ds} = 1$

$\Rightarrow \|\sigma'(g(s))\| \cdot \frac{dg}{ds} = 1$

$\Rightarrow \frac{dg}{ds} = \frac{1}{\|\sigma'(g(s))\|}$

d) $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\sigma}{ds}(g(s))\,\frac{dg}{ds} = \sigma'(g(s)) \cdot \frac{1}{\|\sigma'(g(s))\|}$

Άρα $\left\| \frac{d\varphi}{ds} \right\| = 1.$