ξέρουμε, από τη συζήτηση που προηγήθηκε του Θεωρήματος 5 αυτής της παραγράφου, ότι

$$\int_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}dS = \int_S z dS = \int_D 12dxdy = 300\pi.$$

Τρίτον, μπορούμε να λύσουμε αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιώντας απ' ευθείας τον τύπο (4), με $f(x,y)=12$ και D τον δίσκο $x^2+y^2 \leq 25$:

$$\int_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = \int_D (x\cdot 0 + y\cdot 0 + 12)dxdy = 12\times(\text{εμβαδόν του } D) = 300\pi. \square$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Υποθέτουμε ότι η θερμοκρασία ενός σημείου στον $\mathbf{R}^3$ δίνεται από την $T(x,y,z)=3x^2+3z^2$. Υπολογίστε τη ροή θερμότητας διαμέσου της επιφάνειας $x^2+z^2=2, 0\leq y\leq 2$, αν $k=1$.

2. Υπολογίστε τη ροή θερμότητας διαμέσου της μοναδιαίας σφαίρας S αν $T(x,y,z)=x$ (δείτε το Παράδειγμα 4). Μπορείτε να δώσετε φυσική ερμηνεία για την απάντησή σας;

3. Έστω S η κλειστή επιφάνεια που αποτελείται από το ημισφαίριο $x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0$ και τη βάση του $x^2+y^2\leq 1, z=0$. Έστω $\mathbf{E}$ το ηλεκτρικό πεδίο που ορίζεται από την $\mathbf{E}(x,y,z)=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$. Βρείτε την ηλεκτρική ροή διαμέσου της S. (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Χωρίστε την S σε δύο κομμάτια S_1 και S_2 και υπολογίστε τα $\int_{S_1}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$ και $\int_{S_2}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$ χωριστά.)

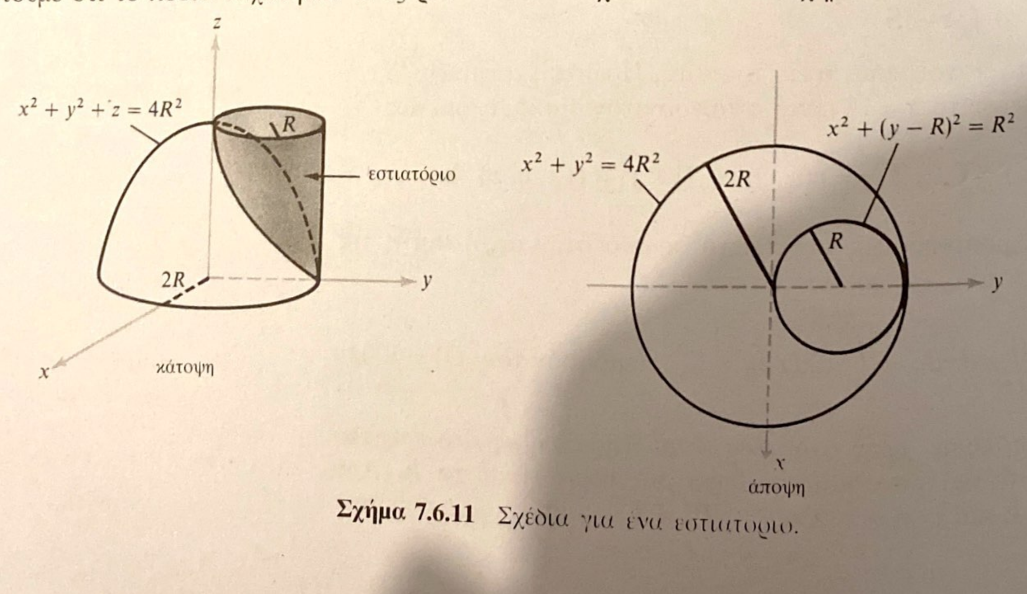
4. Υποθέτουμε ότι το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού είναι το $\mathbf{F}=\sqrt{y}\mathbf{j}$ (το οποίο μετράμε σε μέτρα το δευτερόλεπτο). Υπολογίστε πόσα κυβικά μέτρα ρευστού το δευτερόλεπτο διασχίζουν την επιφάνεια $x^2+z^2=y, 0\leq y\leq 1$, στη διεύθυνση που αυξάνει το y.

5. Υπολογίστε το $\int_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$, όπου S είναι η επιφάνεια $x^2+y^2+3z^2=1, z\leq 0$, και $\mathbf{F}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}+zx^3y^2\mathbf{k}$. (Πάρτε το $\mathbf{n}$ "προς τα πάνω".)

6. Υπολογίστε το $\int_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$, όπου $\mathbf{F}=(x^2+y-4)\mathbf{i}+3xy\mathbf{j}+(2xz+z^2)\mathbf{k}$ και S είναι η επιφάνεια $x^2+y^2+z^2=16, z\geq 0$ ($\mathbf{n}$ "προς τα πάνω").

7. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_S\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, όπου $\mathbf{S}$ είναι η επιφάνεια της μισής μπάλας $x^2+y^2+z^2\leq 1, z\geq 0$, και $\mathbf{F}=(x+3y^5)\mathbf{i}+(y+10xz)\mathbf{j}+(z-xy)\mathbf{k}$ ($\vec{\mathbf{n}}$ "προς τα πάνω").

8. Ένα εστιατόριο χτίζεται στην πλαγιά ενός βουνού. Μπορείτε να δείτε τα σχέδια του αρχιτέκτονα στο Σχήμα 7.6.11.



Σχήμα 7.6.11 Σχέδια για ένα εστιατόριο.

(a) Ο κατακόρυφος κυκλικός τοίχος του εστιατορίου θα φτιαχτεί από γυαλί. Ποιό θα είναι το εμβαδόν της επιφάνειας αυτού του τοίχου;

(b) Για να είναι αρκετά μεγάλο ώστε να αποφέρει κέρδος, ο εμπειρογνώμων μηχανικός πληροφορεί τον επενδυτή ότι ο όγκος του εσωτερικού πρέπει να υπερβαίνει το $\pi R^4/2$. Για ποιά R η προτεινόμενη κατασκευή ικανοποιεί αυτή την απαίτηση;

(c) Σε μια τυπική καλοκαιρινή μέρα, το περιβάλλον του εστιατορίου υπόκειται σε ένα πεδίο θερμοκρασιών που δίνεται από την

$$T(x, y, z) = 3x^2 + (y - R)^2 + 16z^2.$$

Μία πυκνότητα ροής θερμότητας $\mathbf{V} = -k\nabla T$ (το k είναι μία σταθερά που εξαρτάται από τον βαθμό της μόνωσης που θα χρησιμοποιηθεί) μέσα από όλες τις πλευρές του εστιατορίου (συμπεριλαμβανομένης της οροφής και του συνόρου με τον λόφο) παράγει μια ροή θερμότητας. Ποιά είναι η συνολική ροή θερμότητας; (Η απάντησή σας θα εξαρτάται από τα R και k.)

9. Βρείτε τη ροή του $\mathbf{\Phi}(x, y, z) = 3xy^2\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ έξω από τη μοναδιαία σφαίρα.

10. Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dA$, όπου $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + z(x^2 + y^2)^2\mathbf{k}$ και S είναι η επιφάνεια του κυλίνδρου $x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le 1$.

11. Έστω S η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας. Έστω $\mathbf{F}$ ένα διανυσματικό πεδίο και F_r η ακτινική συνιστώσα του. Αποδείξτε ότι

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi} F_r \sin\phi \, d\phi \, d\theta.$$

Ποιός είναι ο αντίστοιχος τύπος για πραγματικές συναρτήσεις f;

***12.** Αποδείξτε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για επιφανειακά ολοκληρώματα: Αν $\mathbf{F}$ είναι ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο, τότε

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = [\mathbf{F}(Q)\cdot\mathbf{n}(Q)]A(S)$$

για κάποιο σημείο $Q \in S$, όπου $A(S)$ είναι το εμβαδόν της S. [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Αποδείξτε το για πραγματικές συναρτήσεις πρώτα, ανάγοντας το πρόβλημα σε αντίστοιχο πρόβλημα για ένα διπλό ολοκλήρωμα: δείξτε ότι αν $g \ge 0$, τότε

$$\int_D fg\,dA = f(Q)\int_D g\,dA$$

για κάποιο $Q \in D$ (κάντε το, θεωρώντας το $(\int_D fg\,dA)/(\int_D g\,dA)$ και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής).]

13. Αποδείξτε έναν τύπο παρόμοιο με αυτόν της Άσκησης 11 με ολοκλήρωση πάνω στην επιφάνεια ενός κυλίνδρου.

14. Έστω S μία επιφάνεια στον $\mathbf{R}^3$, που, ακριβέστερα, είναι ένα υποσύνολο D του επιπέδου xy. Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα μιας βαθμωτής συνάρτησης $f(x, y, z)$ πάνω στην S ανάγεται στο διπλό ολοκλήρωμα της $f(x, y, z)$ πάνω στο D. Με τί είναι ίσο το επιφανειακό ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου πάνω στην S; (Βεβαιωθείτε ότι η απάντησή σας βρίσκεται σε συμφωνία με το Παράδειγμα 6.)

15. Έστω ότι το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού περιγράφεται από το $\mathbf{F} = \mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ (σε μέτρα το δευτερόλεπτο). Υπολογίστε πόσα κυβικά μέτρα ρευστού το δευτερόλεπτο διασχίζουν την επιφάνεια που περιγράφεται από την $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \ge 0$.

16. (a) Ένα ομοιόμορφο ρευστό που ρέει κατακόρυφα προς τα κάτω (δυνατή βροχή) περιγράφεται από το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, -1)$. Βρείτε τη συνολική ροή διαμέσου του κώνου $z = (x^2 + y^2)^{1/2}, x^2 + y^2 \le 1$.

(b) Η βροχή παρασύρεται από έναν ισχυρό άνεμο και πέφτει υπό γωνία $45°$, και περιγράφεται από την $\mathbf{F}(x, y, z) = -(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/)$. Τώρα πόση είναι η ροή διαμέσου του κώνου;

17. Για $a > 0, b > 0, c > 0$, έστω S το άνω μισό του ελλειψοειδούς

$$S = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \ge 0\right\}$$

με τον προσανατολισμό που προσδιορίζεται από το "προς τα πάνω" κάθετο διάνυσμα. Υπολογίστε το $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, όπου $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, 0, 0)$.

18. Αν S είναι το άνω ημισφαίριο $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \ge 0\}$ προσανατολισμένο με βάση το κάθετο διάνυσμα που δείχνει έξω από τη σφαίρα, υπολογίστε το $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ για τα μέρη (a) και (b).

(a) $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

(c) Για κάθε ένα από τα διανυσματικά πεδία (a), (b), υπολογίστε τα $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ και $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, όπου C είναι ο μοναδιαίος κύκλος στο επίπεδο xy με τον προσανατολισμό τον αντίθετο των δεικτών του ρολογιού (όπως τον βλέπουμε από τον θετικό άξονα z). (Παρατηρήστε ότι ο C είναι το σύνορο της S. Το φαινόμενο που περιγράφουμε εδώ θα μελετηθεί σε βάθος στο επόμενο κεφάλαιο, με χρήση του θεωρήματος του Stokes.)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 7

1. Ολοκληρώστε την $f(x,y,z) = xyz$ κατά μήκος των εξής καμπυλών:

(a) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, 3), \quad 0 \le t \le 2\pi$

(b) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad 0 \le t \le 2\pi$

(c) $\boldsymbol{\sigma}(t) = \frac{3}{2}t^2\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$

(d) $\boldsymbol{\sigma}(t) = t\mathbf{i} + (1/\sqrt{2})t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$

2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της f κατά μήκος της καμπύλης $\boldsymbol{\sigma}$ σε καθεμιά από τις περιπτώσεις που ακολουθούν:

(a) $f(x,y,z) = x + y + yz$,
$\boldsymbol{\sigma}(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$

(b) $f(x,y,z) = x + \cos^2 z$,
$\boldsymbol{\sigma}(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$

(c) $f(x,y,z) = x + y + z, \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)$,
$0 \le t \le 1$

3. Υπολογίστε κάθε ένα από τα ακόλουθα επικαμπύλια ολοκληρώματα (β′ είδους)

(a) $\int_C (\sin \pi x) dy - (\cos \pi y) dz$, όπου C είναι το τρίγωνο του οποίου κορυφές είναι τα (1, 0, 0), (0, 1, 0) και (0, 0, 1) μ' αυτή τη διάταξη.

(b) $\int_C (\sin z) dx + (\cos z) dy - (xy)^{1/3} dz$, όπου C είναι η καμπύλη που παραμετρικοποιείται από την $\boldsymbol{\sigma}(\theta) = (\cos^3\theta, \sin^3\theta, \theta), 0 \le \theta \le 7\pi/2$.

4. Αν το $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ είναι ορθογώνιο στο $\boldsymbol{\sigma}'(t)$ σε κάθε σημείο της καμπύλης $\mathbf{x} = \boldsymbol{\sigma}(t)$, τί μπορείτε να πείτε για το $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$;

5. Βρείτε το έργο που παράγεται από τη δύναμη $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ όταν ένα σωματίδιο κινείται αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού πάνω στο τετράγωνο με κορυφές τα $(0,0), (a,0), (a,a), (0,a), a > 0$.

6. Ένα δαχτυλίδι στο σχήμα της καμπύλης $x^2 + y^2 = a^2$ είναι φτιαγμένο από λεπτό σύρμα που ζυγίζει $|x| + |y|$ γραμμάρια ανά μονάδα μήκους στο (x,y). Βρείτε τη μάζα του δαχτυλιδιού.

7. Βρείτε μια παραμετρικοποίηση για κάθε μία από τις ακόλουθες επιφάνειες:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y = 12$

(b) $2x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 1$

(c) $4x^2 + 9y^2 - 2z^2 = 8$

8. Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζεται από την $\mathbf{\Phi}: (u,v) \to (x,y,z)$ όπου

$$x = h(u,v) = u + v, \quad y = g(u,v) = u,$$

$$z = f(u,v) = v,$$

$0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1$. Σχεδιάστε την επιφάνεια.

9. Γράψτε έναν τύπο για το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζει η $\mathbf{\Phi}: (r,\theta) \to (x,y,z)$ όπου

$$x = r\cos\theta, \qquad y = 2r\sin\theta, \qquad z = r,$$

$0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$. Κάντε ένα πρόχειρο σχήμα.

10. Υποθέτουμε ότι $z = f(x,y)$ και $(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 = c, c > 0$. Δείξτε ότι το εμβαδόν του γραφήματος της f πάνω από ένα χωρίο D στο επίπεδο xy, είναι ίσο με $\sqrt{1+c}$ επί το εμβαδόν του D.

11. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ πάνω στην επιφάνεια της Επαναληπτικής Άσκησης 8.

12. Βρείτε το $\int_S f dS$ σε κάθε μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(a) $f(x,y,z) = x$, S είναι το μέρος του επιπέδου $x + y + z = 1$ στο θετικό ογδοημόριο $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$

(b) $f(x,y,z) = x^2$, S είναι το μέρος του επιπέδου $x = z$ μέσα στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$.

(c) $f(x,y,z) = x$, S είναι το μέρος του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 2x$ με $0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}$.

13. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της $f(x,y,z) = xyz$ πάνω στο ορθογώνιο με κορυφές τα (1, 0, 1), (2, 0, 0), (1, 1, 1) και (2, 1, 0).

14. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της $x + y$ πάνω στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας.

15. Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα της x πάνω στο τρίγωνο με κορυφές τα (1, 1, 1), (2, 1, 1) και (2, 0, 3).

16. Ένα παραβολοειδές εκ περιστροφής S παραμετρικοποιείται από την $\mathbf{\Phi}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2), 0 \le u \le 2, 0 \le v \le 2\pi$.

(a) Βρείτε μια εξίσωση ως προς x, y και z που να περιγράφει την επιφάνεια.

(b) Ποιά είναι η γεωμετρική σημασία των παραμέτρων u και v;

(c) Βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα ορθογώνιο στην επιφάνεια στο $\mathbf{\Phi}(u,v)$.

(d) Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο $\mathbf{\Phi}(u_0,v_0) = (1,1,2)$ και γράψτε την με τους εξής δύο τρόπους:

(i) παραμετρικοποιημένη από τα u και v, και

(ii) συναρτήσει των x, y και z

(e) Βρείτε το εμβαδόν της S

17. Έστω $f(x,y,z) = xe^y \cos \pi z$.

(a) Υπολογίστε το $\mathbf{F} = \nabla f$

(b) Υπολογίστε το $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, όπου $\mathbf{c}(t) = (3\cos^4 t, 5\sin^7 t, 0), 0 \le t \le \pi$.

18. Έστω $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Υπολογίστε το $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, όπου S είναι το άνω ημισφαίριο της μοναδιαίας σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

19. Έστω $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Υπολογίστε το $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, όπου $\mathbf{c}(t) = (e^t, t, t^2), 0 \le t \le 1$.

20. Έστω $\mathbf{F} = \nabla f$ για κάποια βαθμωτή συνάρτηση. Έστω $\mathbf{c}(t)$ μία κλειστή καμπύλη, δηλαδή, $\mathbf{c}(b) = \mathbf{c}(a)$. Δείξτε ότι $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$.

21. Θεωρούμε την επιφάνεια $\mathbf{\Phi}(u,v) = (u^2\cos v, u^2 \sin v, u)$. Υπολογίστε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο $u = 1, v = 0$. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου σ' αυτό το σημείο.

22. Έστω S το μέρος του κώνου $z^2 = x^2 + y^2$, με z μεταξύ 1 και 2, προσανατολισμένο από το κάθετο διάνυσμα που δείχνει έξω από τον κώνο. Υπολογίστε το $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, όπου $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$.

23. Έστω $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού (σε μέτρα το δευτερόλεπτο). Υπολογίστε πόσα κυβικά μέτρα ρευστού το δευτερόλεπτο διασχίζουν το επίπεδο xy διαμέσου του τετραγώνου $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.

24. Δείξτε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας του μέρους της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ πάνω από το ορθογώνιο $[-a,a] \times [-a,a]$, όπου $2a^2 < 1$ στο επίπεδο xy, είναι

$$A = 2\int_{-a}^{a} \sin^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx.$$

25. Έστω S μια επιφάνεια και C μια κλειστή καμπύλη που είναι το σύνορο της S. Επαληθεύστε την ισότητα

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

αν το $\mathbf{F}$ είναι πεδίο κλίσεων (χρησιμοποιήστε την Επαναληπτική Άσκηση 20).

26. Υπολογίστε το $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ όπου $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, y, -y)$ και S είναι η κυλινδρική επιφάνεια που ορίζεται από τις $x^2 + y^2 = 1, 0 \le z \le 1$, με το κάθετό της διάνυσμα να δείχνει έξω από τον κύλινδρο.

27. Έστω S το κομμάτι του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 4$ ανάμεσα στα επίπεδα $z = 0$ και $z = x + 3$. Υπολογίστε τα ακόλουθα:

(a) $\int_S x^2 ds$ (b) $\int_S y^2 ds$ (c) $\int_S z^2 ds$

28. Έστω Γ η καμπύλη τομής του επιπέδου $z = ax + by$ με τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$. Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές των πραγματικών αριθμών a και b για τους οποίους $a^2 + b^2 = 1$ και

$$\int_\Gamma y\,dx + (z - x)\,dy - y\,dz = 0.$$

29. Μία κυκλική έλικα που βρίσκεται πάνω στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = R^2$, με βήμα p, περιγράφεται παραμετρικά από τις

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta, \quad z = p\theta, \quad \theta \ge 0.$$

Ένα σωματίδιο γλιστρά υπό την επίδραση της βαρύτητας (η οποία δρα παράλληλα με τον άξονα z) χωρίς τριβή κατά μήκος της έλικας. Αν το σωματίδιο ξεκινά από ύψος $z_0 > 0$, τότε όταν φτάνει σε ύψος $z, 0 \leq z \leq z_0$, ακολουθώντας την έλικα, η ταχύτητά του δίνεται από την

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(z_0 - z)2g},$$

όπου S είναι το μήκος τόξου κατά μήκος της έλικας, g είναι η σταθερά της βαρύτητας και t είναι ο χρόνος.

(a) Βρείτε το μήκος του μέρους της έλικας ανάμεσα στα επίπεδα $z = z_0$ και $z = z_1, 0 \leq z_1 < z_0$.

(b) Υπολογίστε σε πόσο χρόνο T_0 το σωματίδιο θα φτάσει στο επίπεδο $z = 0$.